Integrální počet

Neurčitý integrál

Seminář 9

2. prosince 2019

Neurčitý integrál

Definice. Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu I .
Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní** k funkci $f(x)$ na I , jestliže platí

$$\boxed{F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in I \text{ .}}$$

Množina **všech primitivních funkcí** k funkci $f(x)$ na I se nazývá **neurčitý integrál** z funkce $f(x)$ a značí se $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x)$$

Věta. Nechť funkce $F(x)$ je primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I. Pak každá jiná primitivní funkce k funkci$f(x)$ na I má tvar

$$\boxed{F(x) + c, \text{ kde } c \in \mathbb{R}.}$$

Věta. Je-li funkce f **spojitá** na intervalu I, pak na tomto intervalu **existuje** alespoň jedna primitivní funkce k funkci f .

Věta. Nechť na intervalu I existují integrály $\int f(x)dx$ a $\int g(x)dx$. Pak na I existují také integrály $\int (f(x) \pm g(x))dx$ a $\int a \cdot f(x)dx$, kde $a \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, a platí:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

$$\int a \cdot f(x)dx = a \int f(x)dx$$

Neurčitý integrál ze součtu (rozdílu)
je součtem (rozdílem) neurčitých integrálů,
konstantu lze z neurčitého integrálu vytknout.

Přímo z definice neurčitého integrálu vyplývá platnost rovností

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \quad \text{a} \quad \int F(x)'dx = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Základní integrační metody

- Tabulkové integrály
- Metoda per partes
- Substituční metoda

Tabulkové integrály

- $\int 0dx = c$
- $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
  $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1$
- $\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg} x + c$
- $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + c,$
- $\int dx = x + c$
- $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- $\int \mathrm{a}^x dx = \dfrac{\mathrm{a}^x}{\ln \mathrm{a}} + c,\ \mathrm{a} > 0$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \mathrm{arcsin} x + c$
- $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{cotg} x + c$

Substituční metoda

Připomenutí:

$$(F[\varphi(x)])' = F'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

Věta. Nechť funkce $f(u)$ má na otevřeném intervalu J primitivní funkci $F(u)$, funkce $\varphi(x)$ má derivaci na otevřeném intervalu I a pro libovolé $x \in I$ je $\varphi(x) \in J$. Pak má složená funkce$f[(\varphi(x))]\varphi'(x)$ na intervalu I primitivní funkci a platí

$$\int f[(\varphi(x))]\varphi'(x)\ dx = F[\varphi(x)] + c$$

Použití:

- Označíme $u = \varphi(x)$.
- Rovnost $u = \varphi(x)$ diferencujeme: $u' = \frac{du}{dx} = 1,\ \varphi'(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$
- Nahradíme $\varphi(x) \to u,\ \varphi'(x)\ dx \to du$:

$$\int f[(\varphi(x))]\varphi'(x)\ dx = \left| \begin{array}{c} \varphi(x) = u \\ \varphi'(x)dx = du \end{array} \right| = \int f(u)\ du$$

Příklady : substituční metoda

1. $\displaystyle\int \sin x \cos x \; dx$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x}$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\mathrm{arccos} x}$
4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2} \; dx$
5. $\displaystyle\int \sin 2x \; dx$
6. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{5x} \; dx$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 9}$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

Metoda per-partes

Připomenutí:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \Rightarrow$$

$$\boxed{\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx}$$

Příklady

1. $\int (2x+3) \cos x \; dx$
2. $\int x^2 \ln x \; dx$
3. $\int x \ln^2 x \; dx$
4. $\int \ln x \; dx$
5. $\int \mathrm{arctg} x \; dx$
6. $\int \mathrm{e^x} \cos x \; dx$
7. $\int x \cos(\ln x) \; dx$
8. $\int \frac{2x}{\sin^2 x} \; dx$

Racionální funkce

- Racionální funkce je podíl dvou mnohočlenů.

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_\ell x^\ell}$$

- Každou **neryze** lomenou racionální funkci
  (stupeň čitatele je větší než stupeň jmenovatele nebo je mu roven)
  lze dělením převést na součet mnohočlenu a **ryze** lomené racionální funkce
  (stupeň čitatele je **menší** než stupeň jmenovatele).
- $\dfrac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}$
- $\dfrac{3x^4 - 9x^3 + 13x^2 - x + 2}{x^2 + 2x + 2}$

Parciální zlomky

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k}, \qquad k \in \mathbb{N},\ \alpha, A \in \mathbb{R}$$

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}, \quad k \in \mathbb{N},\ B, C, p, q \in \mathbb{R},\ p^2-4q<0$$

Rozklad na parciální zlomky

Nechť $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ je racionální **ryze** lomená funkce.

Podle rozkladu jmenovatele

$$Q(x) = a(x-\alpha_1)^{k_1} \dots (x-\alpha_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\ell_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{\ell_s}$$

rozkládáme $R(x)$ na součet parciálních zlomků:

- k násobnému **reálnému** kořenu α hledáme A_i:

$$\frac{A_1}{x-\alpha}, \dots, \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$$

- ℓ násobným **komplexně sdruženým** kořenům odpovídajícím $x^2 + px + q$ hledáme $M_1, N_1, \dots, M_\ell, N_\ell$:

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2+px+q}, \dots, \frac{B_\ell x + C_\ell}{(x^2+px+q)^\ell}$$

Rozklad na parciální zlomky - příklady

1. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-6x+5}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x-1)}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{x+8}{x^3+8}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^3-1}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{3x^4-9x^3+13x^2-x+2}{x^2+2x+2}\,dx$

Integrály obsahující goniometrické funkce: $R(\cos x, \sin x)$

$$\int \cos^m(x) \cdot \sin^n(x)\ dx,\ \ m, n \in \mathbb{Z}$$

- aspoň jedno z čísel m, n je **liché**:
  substituce: (m je liché) $\boxed{\sin x = t}$ resp. (n je liché) $\boxed{\cos x = t}$
  $\Rightarrow$ $\cos x\ dx = dt$ resp. $\sin x\ dx = dt$,
  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
- obě čísla jsou **sudá, nezáporná**
  úprava: $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$
- obě čísla jsou **sudá, alespoň jedno záporné**:
  substituce: $\boxed{t = \operatorname{tg} x}$
- univerzální substituce $\boxed{t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$, $x \in (-\pi, \pi)$,

  $x = \operatorname{arctg}\ t,\ \ dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Příklady

1. $\int \cos^5 x \sin^2 x \; dx$
2. $\int \frac{1}{\sin x} \; dx, \;\; x \in (0, \pi)$
3. $\int \cos^2 x \; dx$
4. $\int \sin^4 x \cos^2 x \; dx$

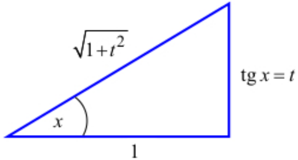
Substituce $t = tg\ x$

Příklad $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}\, dx$ Integrujme na např. $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$m = 2$: sudé, $n = -8$: sudé **záporné**, použijeme $\boxed{t = \operatorname{tg} x}$

- $$\boxed{t = \operatorname{tg} x, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt, \quad x \in I}$$
- Potřebujeme vyjádřit $\sin x$, $\cos x$ pomocí $\operatorname{tg} x$.

$$\boxed{\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$$

- 

Potřebné vztahy odvodíme z pravoúhlého trojúhelníka, jehož jeden úhel má velikost x. Přilehlou odvěsnu zvolíme rovnu 1, protilehlá odvěsna bude mít velikost tg x. Z Pythagorovy věty vypočteme velikost přepony $\sqrt{1+t^2}$.
Použijeme definice funkcí sinus a kosinus (poměr velikostí protilehlé, resp. přilehlé odvěsny ku přeponě).

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}\, dx = \left| \begin{array}{c} \text{substituce} \\ t = \operatorname{tg} x \end{array} \right| = \int \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^8} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}\ dx = \left| \begin{array}{c} \text{substituce} \\ t = \operatorname{tg} x \end{array} \right| = \int \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^8} \cdot \frac{1}{1+t^2}\ dt =$$

$$= \int \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\left(1+t^2\right)^4}{1} \cdot \frac{1}{1+t^2}\ dt =$$

$$= \int t^2 \left(1+t^2\right)^2\ dt = \frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C =$$

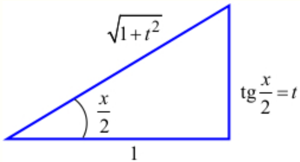
$$= \boxed{\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{2}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + C}$$

Univerzální substituce $\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x \in (-\pi, \pi)}$

- $$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt, \quad x \in I}$$
- Potřebujeme vyjádřit $\sin x$, $\cos x$ pomocí $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

$$\boxed{\sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

- 

Potřebné vztahy odvodíme z pravoúhlého trojúhelníka, jehož jeden úhel má velikost $\frac{x}{2}$. Přilehlou odvěsnu zvolíme rovnu 1, protilehlá odvěsna bude mít velikost $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Z Pythagorovy věty vypočteme velikost přepony $\sqrt{1+t^2}$.
Použijeme definice funkcí sinus a kosinus (poměr velikostí protilehlé, resp. přilehlé odvěsny ku přeponě) a vzorce pro dvojnásobný úhel $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Příklad $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 1}$, $x \in (0, \pi)$

Příklad

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 1} = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{2\dfrac{2t}{1+t^2} - \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{2}{4t - 1 + t^2 + 1 + t^2}\, dt = \int \frac{1}{t^2 - 2t}\, dt =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Rozložíme na} \\ \text{ parciální zlomky:} \end{array} \quad \frac{1}{t(t-2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} \Rightarrow A(t-2) + Bt = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2} \right| =$$

$$\int \frac{-\frac{1}{2}}{t} + \frac{\frac{1}{2}}{t-2}\, dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-2}{t} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| 1 - \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C$$

Integrály obsahující odmocniny

$R(x, \sqrt[s]{x})$: **substituce** $x = t^s$

Příklad: $\displaystyle\int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}}\, dx$

$R(x, \sqrt[s]{ax + b})$: **substituce** $ax + b = t^s$

$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$:
Eulerovy substituce, goniometrické substituce