Matematika 1

Seminář první

30. září 2019

Obsah

1. Úvodní informace
2. Operace s vektory
3. Lineární závislost a nezávislost
4. Báze vektorového prostoru

Úvodní informace

- Zápočet:
  - docházka
- Organizace předmětu
  Tématické celky:
  - I. lineární algebra,
  - II. diferenciální počet,
  - III. integrální počet.

  Seminář navazuje na přednášku, přednáška určuje kontext.

Vektorové prostory

Definice (J. Neustupa, skripta M1) Neprázdná množina $\mathbf{V}$, ve které jsou definovány **dvě operace:**

- sčítání prvků (z množiny $\mathbf{V}$)
- násobení prvků (z množiny $\mathbf{V}$) reálnými čísly

tvoří vektorový prostor, pokud platí:

- uzavřenost $(\forall u, v \in \mathbf{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \ v_1 + v_2 \in \mathbf{V}, \ \alpha v_1 \in \mathbf{V})$
- existence neutrálního prvku
  $(\exists o \in \mathbf{V} : \forall v \in \mathbf{V} : o + v = v + o = v)$
- existence inverzního prvku: $(\forall v \in \mathbf{V} \exists u \in \mathbf{V} : u + v = o)$, takový prvek označujeme opačný, $u = -v$
- komutativnost a asociativnost operace sčítání, tj.
  - $\forall v_1, v_2 \in \mathbf{V} : v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
  - $\forall v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{V} : (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
- $\exists 1 \in \mathbb{R} : \ \forall v \in \mathbf{V} : 1v = v$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall v \in \mathbf{V} : \ \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
- distributivita
  - $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall u, v \in \mathbf{V} : \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall v \in V : (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$

Příklady vektorových prostorů

1. $\mathbb{R}^n$
2. $\mathbb{R}^{m\times n}$
3. $\mathcal{P}$ Polynomy s reálnými koeficienty proměnné x
4. $\mathcal{P}^n$ Polynomy **nejvýše** n-tého stupně s reálnými koeficienty proměnné x
5. $\mathcal{F}$ Reálné funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
6. $\mathcal{C}$ Spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
7. $\mathcal{C}_{[a,b]}$ Spojité funkce na intervalu $\langle a,\ b\rangle$ $f : \langle a,\ b\rangle \to \mathbb{R}$

Součet vektorů a násobení vektoru reálným číslem: příklady

Určete vektor x

1. $x = 3a + 5b - c$, je-li
   $a = (4, 1, 3, -2), b = (1, 2, -3, 2), c = (16, 9, 1, -3),$
2. $x = -a + 4b - 6c + 2d$, je-li
   $a = (1, 1, -1, -1), b = (0, 0, 0, 0),$
   $c = (12, 0, 1, 4), d = (-1, -1, 1, 1),$
3. $a + 2b + 3c - 4x = o$, kde
   $a = (5, -8, -3, 2), b = (2, -1, 4, -3), c = (-3, 2, -5, 4),$
4. $a - x + 13(b + x) - 14(2a - b) = o$, kde
   $a = (1, 1, -1), b = (2, 0, 2),$
5. $5u - 4x - 3v + x + 2w = u + 2x$, kde
   $u = (1, -1, 1, 1), v = (0, 2, 2, 2), w = (3, -3, 3, -3).$

Lineární kombinace: příklady

Najděte všechny hodnoty t, pro které je možno vektor u vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů a, b, c:

1. $u = (5, 3, t)$, $a = (1, 0, 2), b = (0, 1, 1), c = (4, 1, 9)$
2. $u = (4, 3, t)$, $a = (1, 2, 3), b = (2, -1, 1), c = (1, 7, 8)$,
3. $u = (t, 6, 7)$, $a = (1, 4, 5), b = (3, 8, 10), c = (0, -4, -5)$,
4. $u = (1, 3, 5)$, $a = (1, 3, 4), b = (2, 8, -2), c = (3, 11, t)$.

Lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů

Definice (lineární kombinace).

Je-li $u_1,\ u_2,\dots,u_n$ skupina vektorů ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}$ a $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ jsou reálná čísla, pak vektor $\boxed{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n}$ (který je rovněž vektorem ve $\mathbb{V}$) nazýváme **lineární kombinací vektorů** $u_1, u_2, \dots u_n$.

Definice (lineární závislost a nezávislost vektorů).

Skupinu vektorů $u_1,\ u_2,\dots,u_n$ nazýváme lineárně závislou (LZ), jestliže reálná čísla $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$, z nichž **alespoň jedno je různé od nuly** a platí $\boxed{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = o}$.

Pokud $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = o$ **pouze** pro $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, nazýváme skupinu vektorů lineárně nezávislou (LN).

Tvrzení.

- Je-li jedním ze skupiny vektorů $u_1,\ u_2,\dots,u_n$ z vektorového prostoru $\mathbb{V}$ nulový vektor, pak tato skupina je LZ.
- Skupina vektorů $u_1,\ u_2,\dots,u_n$ (kde $n > 1$) z vektorového prostoru $\mathbb{V}$ je LZ právě tehdy, je-li možné alespoň jeden z vektorů této skupiny vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů skupiny.

Příklady: je zadaná skupina vektorů LZ nebo LN?

1. $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 3, 1)$, $\vec{w} = (-1, 3, 8)$
2. $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 3, 1)$, $\vec{w} = (-1, 3, 7)$
3. $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$, $\vec{w} = (1, 0, 0)$
4. $\vec{u} = (1, 2, 4)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$, $\vec{w} = (4, -1, 1)$

Určete číslo t tak, aby vektory u, v, w byly lineárně závislé:

a) $u = (2, 1, 3), v = (1, 2, -5), w = (3, 0, t)$,

b) $u = (1, 2, 2), v = (2, t, 3), w = (2, 5, 4)$,

c) $u = (-1, t, 2), v = (1, 1, 2), w = (3, 0, t)$,

d) $u = (4, 5, 2), v = (2, 2t, t), w = (2, 10 - 6t, 4 - 3t)$.

Báze vektorového prostoru

O vektorovém prostoru $\mathbb{V}$ řekneme, že je n rozměrný ($dim\mathbb{V} = n$), jestliže v prostoru

- existuje skupina n vektorů, která je lineárně nezávislá
- a každá skupina více než n vektorů je lineárně závislá.

Dimenze (rozměr) vektorového prostoru $\mathbb{V}$ je rovna maximálnímu **počtu** lineárně nezávislých vektorů, které lze ve $\mathbb{V}$ nalézt.

Definice (báze vektorového prostoru).
Nechť $\mathbb{V}$ je n–rozměrý vektorový prostor.
Každou lineárně nezávislou skupinu n vektorů z $\mathbb{V}$ nazýváme bází prostoru $\mathbb{V}$.

Tvrzení. Je-li $u_1,\ u_2, \ldots, u_n$ báze vektorového prostoru $\mathbb{V}$, pak každý vektor z $\mathbb{V}$ lze vyjádřit jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů této báze.

Příklady: báze vektorového prostoru

1. Určete souřadnice vektoru $\vec{a} = (1, 2) z \mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ vzhledem k bázi (tj. vyjádřete $\vec{a}$ jako lineární kombinaci vektorů báze)
   1. $\vec{u}_1 = (0, 1), \ \vec{u}_2 = (1, 0)$
   2. $\vec{v}_1 = (1, 1), \ \vec{v}_2 = (-1, 0)$
2. Zjistěte, zda dané vektory tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. V kladném případě vyjádřete vektor $a = (1, 1, 2)$ jako jejich lineární kombinaci a stanovte souřadnice vektoru a v dané bázi:
   1. $u1 = (1, 1, 1), u2 = (1, 1, 0), u3 = (2, 0, 0),$
   2. $u1 = (0, 1, -1), u2 = (0, 2, -2), u3 = (1, 1, 3)$
   3. $u1 = (1, 2, 1), u2 = (0, 1, 1), u3 = (0, 0, 3).$