Příklad 1: využití násobení mocninných řad.

Určete koeficienty Taylorova polynomu 3. stupně pro funkci $y = \mathrm{tg}x$ v okolí $x_0 = 0$

- $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ $\qquad \mathrm{tg}(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} \qquad \Rightarrow \qquad \cos(x)\mathrm{tg}(x) = \sin x$

Koeficienty řady určíme porovnáním koeficientů levé a pravé strany rovnosti řad.

$\mathrm{tg}(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ $\qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$
\begin{aligned}
\cos(x) \cdot \mathrm{tg}(x) &= \left(1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} + \dots\right)\left(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots\right) \\
&= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \\
&\qquad\qquad - \frac{c_0}{2}x^2 - \frac{c_1}{2}x^3 - \dots \\
&\quad \dots \\
\sin(x) &= \qquad x \qquad\qquad - \frac{x^3}{3!} + \dots
\end{aligned}
$$

Soustava rovnic:

$$
\begin{aligned}
x^0 :&\quad c_0 &= 0 \\
x :&\quad c_1 &= 1 \\
x^2 :&\quad c_2 - \tfrac{c_0}{2} &= 0 \\
x^3 :&\quad c_3 - \tfrac{c_1}{2} &= \tfrac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Příklad 2: výpočet určitého integrálu.

Pomocí vhodné mocninné řady určete přibližnou hodnotu integrálu součtem několika prvních členů odpovídající řady. Odhadněte chybu vypočtené hodnoty.

Nejvýš jeden integrál dle vlastního výběru.

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$ $\qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$
- $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{arctg}x}{x}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4}\,dx$

Příklad 3.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x)$ pro $x \in (-1, 1\rangle$ (pro $x = 1$ KR), a pro $x = 1$ platí $\displaystyle\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

- Integrací této řady pro $x \in \langle 0,\ 1)$ určete čemu se rovná $\dfrac{1}{1\cdot 2} - \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} - \dfrac{1}{4\cdot 5} + \dots =???$
- Čemu se rovná $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} - \dfrac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \dots =???$

Odevzdání na cvičení 16.10.2019