Cvičení 7

ODR: Exaktní

6.11.2019

Exaktní rovnice

Nechť $P(x,y),\ Q(x,y)$ jsou spojité v $G \subseteq \mathbb{R}^2$

a mají spojité derivace v každém bodě $[x,y] \in G$.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \text{ je exaktní v } G \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

tj. pokud $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ je **totálním diferenciálem** funkce $F(x,y)$.

Funkci F budeme nazývat **kmenovou funkcí**.

Řešení exaktní rovnice.

Kmenovou funkci F můžeme určit stejným způsobem jako potenciál vektorového pole (P, Q).

Vyjdeme z definice gradientu: $\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (P,\ Q)$

1. $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow F(x,y) = \int P(x,y)\ dx = U_1(x,y) + K_1(y)$
2. $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow F(x,y) = \int Q(x,y)\ dy = U_2(x,y) + K_2(x)$
3. Kmenovou funkci $F(x,y)$ vytvoříme sloučením $U_1(x,y)$, $U_2(x,y)$, $K_1(y)$, $K_2(x)$, přičemž členy, které se vyskytují ve výrazech, zapisujeme do výsledného výrazu **pouze jedenkrát**.

Řešení exaktní rovnice zpravidla určíme v implicitním tvaru.

Příklad: exaktní rovnice

$$\underbrace{(2y-3x^2)}_{P(x,y)}\,dx+\underbrace{2(x-y)}_{Q(x,y)}\,dy=0$$

1. Ověření exaktnosti: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2=\dfrac{\partial Q}{\partial y},\quad G=\mathbb{R}^2$
2. $\displaystyle\int P(x,y)\;dx=\int 2y-3x^2\;dx=\underbrace{2xy}_{U_1}-\underbrace{x^3}_{K_2(x)}+K_1(y)$
3. $\displaystyle\int Q(x,y)\;dy=\int 2x-2y\;dy=\underbrace{2xy}_{U_2}-\underbrace{y^2}_{K_1(y)}+K_2(x)$
4. $F(x,y)=2xy-x^3-y^2+const$
5. **Obecné řešení:** $F(x,y)=C$, tj. $y^2-2xy+x^3=C$
6. Rovnicí $F(x,y)=C$ je zadaná **funkce** $y(x)$: $F_y\neq 0\Rightarrow y\neq x$
7. **Řešení C.ú.** pro počáteční podmínku $y(0)=1$
   $y^2-2xy+x^3=1,\;x<y$:

Přítel Matlab

Potenciál vektorového pole pomůže určit funkce **potencial()**:

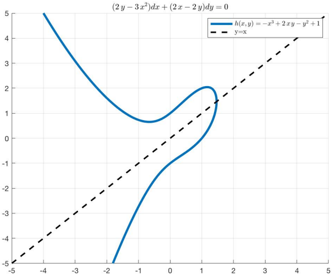
```
syms x y
P(x,y) = 2*y - 3*x^2;
Q(x,y) = 2*(x-y);
h = potential([P,Q], [x y])
```

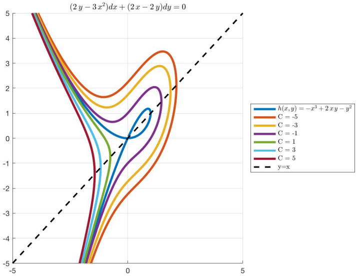
Řešení: `h(x, y) = - x^3 + 2*x*y - y^2`

Chceme-li určit **integrální křivku**, která prochází zadaným bodem $y(x_0) = y_0$, např. $y(0) = 1$, zadáme $[x_0, y_0]$ jako třetí parametr.

```
h = potential([P,Q], [x y], [0,1])
```

Řešení: `h(x, y) = - x^3 + 2*x*y - y^2 + 1`

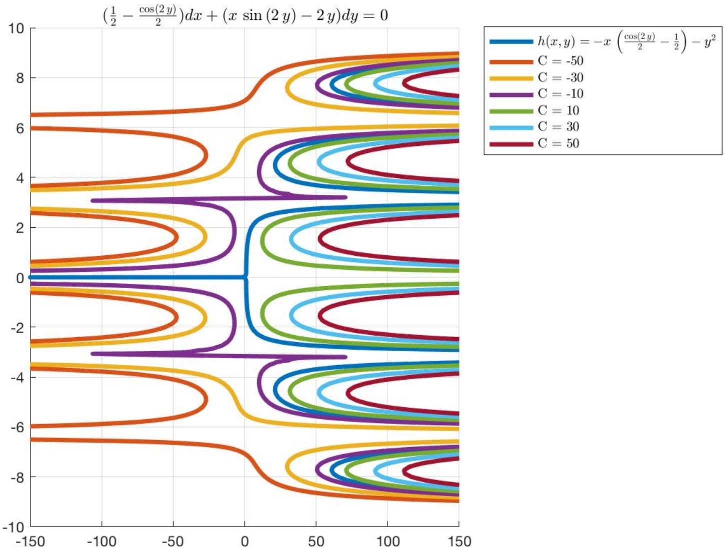




Příklad: $\sin^2 y\ dx + (x \sin 2y - 2y)\ dy = 0$

1. Ověření exaktnosti:
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2 \sin y \cos y = \sin 2y = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad G = \mathbb{R}^2$$
2. $$\int P(x,y)\ dx = \int \sin^2 y\ dx = x \sin^2 y + K_1(y)$$
3. $$\int Q(x,y)\ dy = \int (x \sin 2y - 2y)\ dy = -\frac{x}{2} \cos 2y - y^2 + K_2(x)$$
4. **Pozor!** rovnají se $x \sin^2 y$ a $-\frac{x}{2} \cos 2y$ **?**
$$-\frac{x}{2} \cos 2y = -\frac{x}{2} (\cos^2 y - \sin^2 y) = -\frac{x}{2} (1 - \sin^2 y - \sin^2 y) = -\frac{x}{2} + x \sin^2 y$$
takže
$$\int \sin^2 y\ dx = x \sin^2 y + K_1(y) = -\frac{x}{2} \cos 2y + \frac{x}{2} + K_1(y)$$
5. **Obecné řešení:** $F(x,y) = C$, tj. $-\frac{x}{2} \cos 2y + \frac{x}{2} - y^2 = C$
6. **Zkouška**
$$\mathrm{grad}\ F = (F_x, F_y) = \left(\frac{1 - \cos(2y)}{2},\ x \sin(2y) - 2y \right)$$

Příklad : $\sin^2 y \; dx + (x \sin 2y - 2y) \; dy = 0$



Jiný postup řešení $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

Vycházíme z definice gradientu: $\mathrm{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \ \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (P, \ Q)$

1. $U_1(x,y)$ určíme stejně:
   $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow F(x,y) = \int P(x,y)\ dx = U_1(x,y) + K_1(y)$
2. $K_1(y)$ určíme z podmínky:
   $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow \frac{\partial U_1(x,y)}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}\ K_1(y)}{\mathrm{d}\ y} = Q(x,y)$, tj.
   $K_1(y) = \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial U_1(x,y)}{\partial y}\right)\ dy$

Předcházející příklad

1. $\int P(x,y)\ dx = \int \sin^2 y\ dx = x\sin^2 y + K_1(y)$
2. $\underbrace{2x\sin y\cos y}_{x\sin 2y} + \frac{\mathrm{d}\ K_1(y)}{\mathrm{d}\ y} = x\sin(2y) - 2y \Rightarrow K_1(y) = y^2$
3. $F(x,y) = x\sin^2 y - y^2 + const = x\frac{(1-cos2y)}{2} - y^2 + const$

Poznámka

Separovatelnou rovnici lze převést na exaktní.

Separovatelná: $\dfrac{dy}{dx} = A(x) \cdot B(y)$.
Upravujeme:

$$\frac{1}{B(y)} dy = A(x) dx \Rightarrow \underbrace{A(x)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{\left(-\frac{1}{B(y)}\right)}_{Q(x,y)} dy = 0$$

Ověření:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial A(x)}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial B(y)}{\partial x} = 0$$

Opačně to samozřejmě neplatí.