Cvičení 6

ODR: Lineární a Bernoulliova

30.10.2019

Obsah

Lineární rovnice

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Pro existenci jediného řešení požadujeme spojitost $p(x), q(x)$ na množině $G \subseteq \mathbb{R}$, na které hledáme řešení.

Řešení hledáme ve tvaru

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

1. $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + uv'$ a rovnici upravíme:

$$u'v + u \underbrace{(v' + pv)}_{\text{položíme } =0} = q$$

I. určíme v, pro které platí

$$\begin{aligned} v' + pv &= 0 \\ \frac{dv}{v} &= -p dx \end{aligned}$$

II. dopočítáme u:

$$\begin{aligned} u'v &= q \\ du &= \frac{q}{v} dx \quad \Rightarrow u = \int \frac{q}{v} dx + C \end{aligned}$$

2. Obecné řešení: $y = \left(\int \frac{q}{v} dx + C \right) \cdot v$

3. Je-li zadaná počáteční podmínka, určíme řešení Cauchyovy úlohy.

Příklad $y' + 2xy = x^3$

Určíme obecné řešení rovnice

1. Existence řešení:

   $2x$ a x^3 jsou spojité pro všechna reálná čísla x, tedy řešení existuje $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Řešení budeme hledat ve tvaru $y = uv$, upravíme rovnici:

$$u'v + uv' + 2xuv = x^3$$

I. určíme v, pro které

$v' + 2xv = 0$

$v = e^{-x^2}$

II. dopočítáme u

$u' e^{-x^2} = x^3$

$u = \int x^3 e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

3. vyjádříme a upravíme obecné řešení

$$y_{ob} = u \cdot v = \left(\frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C \right) \cdot e^{-x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right) + Ce^{-x^2}$$

4. Provedeme zkoušku:

$$\begin{array}{lrcl} & y & = & \frac{1}{2}\left(x^2-1\right) + Ce^{-x^2} \\ \text{pravá strana} & -2xy + x^3 & = & -2x\left(\frac{1}{2}\left(x^2-1\right) + Ce^{-x^2}\right) + x^3 \\ & & = & -x^3 + x - 2xCe^{-x^2} + x^3 \\ & & = & x - 2xCe^{-x^2} \\ \text{levá strana} & y' & = & x - 2xCe^{-x^2} \\ & L & = & P \end{array}$$

Přítel Matlab

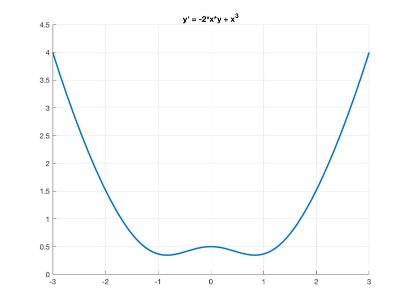
V Matlabu získáme obecné řešení pomocí funkce `dsolve`:

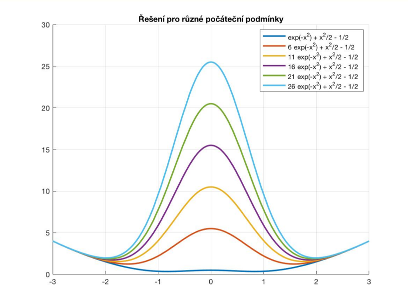
```
obecne = dsolve('Dy = -2*x*y + x^3','x')
```

výsledek: `obecne = C2*exp(-x^2) + x^2/2 - 1/2`
Řešení Cauchyovy úlohy s počáteční podmínkou $y(0) = 1/2$ dostaneme:

```
reseni_CU = dsolve('Dy = -2*x*y + x^3','y(0)=1/2','x')
```

výsledek: `reseni_CU = exp(-x^2) + x^2/2 - 1/2`
graf řešení: `fplot(reseni_CU,[-3 3],'LineWidth',2)`





Příklad: míchání tekutin

Do nádrže, která obsahuje 100ℓ vody s $40g$ soli vtéká tekutina rychlostí $4\ell/min$ s koncentrací soli $3g/\ell$ a vytéká z nádrže rychlostí $2\ell/min$. Voda je neustále promíchávána. Jaké je množství soli v nádrži v čase?

Označme $y(t)$ množství soli (v gramech), které je v nádrži v čase t,
$V1$ rychlost, kterou do nádrže sůl přitéká,

$$V1 = (3g/\ell)(4\ell/min) = 12g/min.$$

$V2$ rychlost, kterou z nádrže vytéká.

$$V2 = \left(\frac{y(t)}{100+2t} g/\ell\right)(2\ell/min) = \frac{y(t)}{50+t} g/min.$$

Změnu množství soli v čase t lze popsat

(za předpokladu, že $y(t)$ je diferencovatelná funkce)

$$y' = V1 - V2, \quad y' = 12 - \frac{y(t)}{50+t}$$

Jedná se o lineární rovnici, jejíž obecné řešení je

$$y(t) = \frac{C}{50+t} + \frac{6t^2 + 600t}{50+t}.$$

V na začátku je ve vodě 40 g soli, tj. počáteční podmínka: $y(0) = 40$.

Proto je řešení $\frac{2000}{50+t} + \frac{6t^2 + 600t}{50+t}$.

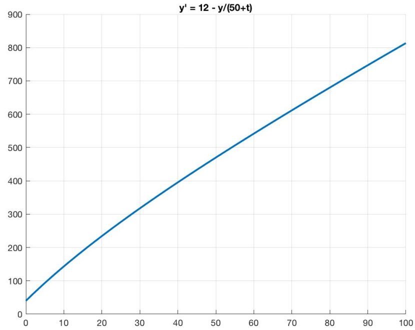
Příklad Míchání tekutin v Matlabu

Diferenciální rovnice a počáteční podmínka

$$y' = 12 - \frac{y(t)}{50+t}, \quad y(0) = 40$$

```
reseni = dsolve('Dy=12 - y/(50+t)','y(0) = 40')

reseni =
2000/(t + 50) + (6*t*(t + 100))/(t + 50)
```



graf řešení:

Samočištění jezírka

V jezírku objemu V je jisté množství nečistot x, na začátku (v čase $t = 0$) je množství nečistot x_0.
Do jezera přitéká čistá voda konstantní rychlostí r a stejnou rychlostí odtéká voda s nečistotami. Hladina vody se nemění.
Předpokládáme, že rozdělení nečistot je rovnoměrné, voda se "sama" promíchává.
r udává, jaký objem vody v jezeře se vymění za 1 den,
$\frac{r}{V}$ udává, jak velká část vody se vymění za 1 den.
Úbytek nečistot je přímo úměrný množství nečistot, které odtečou za jednotku času:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{V}x, \quad x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 e^{-\frac{r}{V}t}$$

Koncentrace nečistot

Na začátku je v jezírku objemu V množství nečistot x_0, konstantní rychlostí r do jezírka přitéká množství nečistot za jednotku času $c(t)$.
Z jezírka odtéká voda stejnou rychlostí r, hladina se nemění.
Pro konstantní c lze úlohu řešit separací proměnných,
pro proměnné $c(t)$ je rovnice lineární.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{V}x + c(t), \quad x(0) = x_0$$

Například: Jezero objemu $V = 1000m^3$ je na začátku čisté. Rychlostí $r = 2m^3/h$ přitéká voda, ve které je koncentrace nečistot $3mg/m^3$.
Z jezera odtéká voda (s nečistotami) stejnou rychlostí.
Kdy voda v jezeře dosáhne koncentrace 1mg/h?

To znamená, že do jezera přitéká $2 \cdot 3\ mg/h$ nečistot,
odtéká $\frac{2}{1000}x\ mg/h$.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{1000}x + 6, \quad x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 500(6 - Ce^{-\frac{2}{1000}t}),\ C = 6$$

Kdy bude koncentrace 1? $\dfrac{x}{V} = 1 \quad \Rightarrow\ x = -500 \ln \dfrac{2}{3}$

Soustava 2 jezer

První jezero: objem $V1\ m^3$, vtok čisté vody rychlostí rm^3/h, odtok znečištěné stejnou rychlostí.
Druhé jezero: objem $V2\ m^3$, vtok znečištěné vody z prvního jezera rychlostí rm^3/h, odtok znečištěné stejnou rychlostí.
Konstanty samočištění: $k_1 = \frac{r}{V_1},\ k_2 = \frac{r}{V_2}$
Množství nečistot v prvním jezeře $x(t)$, ve druhém $y(t)$, v čase $t = 0$ je množství $x_0,\ y_0$. Soustava:

$$\begin{array}{rcll} x' & = & -k_1 x & \\ y' & = & +k_1 x & -k_2 y \end{array}$$

Můžeme převést na lineární rovnici :
z první rovnice $x = x_0 e^{-k_1 t} \Rightarrow y' + k_2 y = k_1 x_0 e^{-k_1 t}$.

Bernoulliova rovnice

Základní tvar Bernoulliovy rovnice

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\ell},$$

kde $p(x), q(x)$ jsou spojité funkce na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$.
Předpokládáme, že $\ell \neq 0,\ \ell \neq 1$,
protože pro tyto hodnoty ℓ je rovnice lineární.

V případě, že $\ell > 0$, je funkce $y = 0$ řešením rovnice.

Poznámka:
Řešení nemusí existovat na celém intervalu J.

Postup řešení

Postupujeme velmi podobně řešení lineární rovnice.

1. $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + uv'$ a rovnici upravíme:

$$u'v + u \underbrace{(v' + pv)}_{\text{položíme } = 0} = qu^{\ell}v^{\ell}$$

I. určíme v, pro které platí

$$\begin{aligned} v' + pv &= 0 \\ \frac{dv}{v} &= -pdx \end{aligned}$$

II. dopočítáme u:

$$\begin{aligned} u'v &= qu^{\ell}v^{\ell} \\ u^{-\ell}du &= \frac{q^{\ell}}{v}dx \end{aligned}$$

separujeme, integrujeme a vyjádříme u

2. Upravíme obecné řešení: $y = u \cdot v$
3. Je-li zadaná počáteční podmínka, určíme řešení Cauchyovy úlohy.

Příklad

Určíme partikulární řešení Bernoulliovy rovnice, které prochází bodem $[1,\ -4]$.

$$y' = \frac{1}{x}y - x^2y^2, \quad y(1) = -4$$

- **Existence řešení:** $x \neq 0 \Rightarrow$ řešení diferenciální rovnice existují v polorovinách
  $M_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in (-\infty,\ 0),\ y \in (-\infty,\ \infty)\}$ a
  $M_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,\ \infty),\ y \in (-\infty,\ \infty)\}$.
  Partikulární řešení, které prochází bodem $[1,\ -4]$ leží v polorovině M_2.

  Interval nalezeného řešení nemusí být celý interval $(0,\ \infty)$, ale jeho podmnožina!
- Je $y = 0$ řešením diferenciální rovnice $y' = \dfrac{1}{x}y - x^2y^2$?
  Levá strana: $y' = 0$
  Pravá strana: $\dfrac{1}{x} \cdot 0 - x^2 \cdot 0^2 = 0$
  $L = P \Rightarrow$ ano.
  Je to hledané řešení počáteční úlohy?
  $y(1) \neq -4 \Rightarrow$ není.

Příklad: $y' = \frac{1}{x}y - x^2y^2, y(1) = -4$

1. Určíme **v** (řešení homogenní rovnice)

$$v' = \frac{1}{x}v$$

separujeme: $\frac{dv}{v} = \frac{1}{x}dx$ a integrujeme: $v = x$

2. Upravíme rovnici pro funkci u: $u'x = -u^2x^4,$
3. separujeme: $-\frac{du}{u^2} = x^3 \; dx$

integrujeme: $\frac{1}{u} = \frac{x^4}{4} + \frac{C}{4}$ $\Rightarrow$ $u = \frac{4}{x^4 + C}$

4. Vyjádříme $y_{ob} = u \cdot v$:

$$y_{ob} = \left(\frac{4}{x^4 + C}\right) \cdot x = \frac{4x}{x^4 + C}$$

Příklad: $y' = \frac{1}{x}y - x^2y^2, y(1) = -4$

- Obecné řešení: $y_{ob} = \left(\dfrac{4}{x^4 + C}\right) \cdot x = \dfrac{4x}{x^4 + C}$
- Určíme **partikulární řešení**, které vyhovuje **počáteční podmínce** $y(1) = -4$:

$$-4 = \frac{4}{1 + C} \Rightarrow -4 - 4C = 4 \Rightarrow C = -2 \qquad y = \frac{4x}{x^4 - 2}$$

- **Interval** nalezeného řešení: $x \in (\sqrt[4]{2},\ \infty)$
- Provedeme **zkoušku**:

$$y = \frac{4x}{x^4 - 2}$$

pravá strana
$$\frac{1}{x}y - x^2y^2 = \frac{1}{x} \cdot \frac{4x}{x^4 - 2} - x^2 \frac{16x^2}{(x^4 - 2)^2} = \frac{-12x^4 - 8}{(x^4 - 2)^2}$$

levá strana
$$y' = \frac{4(x^4 - 2) - 4x \cdot 4x^3}{(x^4 - 2)^2} = \frac{-12x^4 - 8}{(x^4 - 2)^2}$$

$$L = P$$

Příklad: Vývoj populace

Jedním z modelů vývoje poulace, která už je dostatečně velká, má omezené zásoby potravy i dalších zdrojů a mezi členy populace dochází k soupeření o tyto zdroje je

$$y' = ay(t) - by^2(t)$$

Konstanta a udává přírůstek populace za časovou jednotku,
b popisuje soupeření o zdroje.
Jedná se o Bernoulliovu rovnici.

Příklad Vývoj populace

Diferenciální rovnice $y' = ay(t) - by^2(t)$
a, b byly odhadnuty pro vývoj poplulace v USA v letech 1790 - 1950.
$a = 0.03134, \; b = 1.5887 \cdot 10^{-10}, \quad t$: roky
Počáteční podmínka: v roce 1790 bylo v USA 3 929 000 obyvatel.

```
populace = dsolve('Dy = a*y - b* y^2', 'y(1790) = 3929000')

populaceUSA = subs(populace, {'a','b'}, {0.03134, 1.5887E-10})

populace1950 = double(subs(populaceUSA,[1800 1850 1900 1950]))
```

Srovnání statistických údajů a vypočtených hodnot:

Rok	Počet obyvatel	Vypočteno
1790	3 929 000	
1800	5 308 000	5 350 280
1850	23 192 000	23 248 685
1900	75 995 000	77 000 000
1950	150 697 000	148 777 550