Cvičení 4

Fourierovy řady

16.10.2019

Připomenutí

$$\int \cos\frac{k\pi x}{L}\ dx = \frac{L}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi x}{L} + C$$

$$\int \sin\frac{k\pi x}{L}\ dx = -\frac{L}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{L} + C$$

$$\int x\cos\frac{k\pi x}{L}\ dx = \left|\begin{array}{cc} u = x & dv = \cos\frac{k\pi x}{L}\ dx \\ du = dx & v = \frac{L}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{L} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{L}{k\pi}x\sin\frac{k\pi x}{L} - \int\frac{L}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{L}dx = \frac{L}{k\pi}x\sin\frac{k\pi x}{L} + \frac{L^2}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{L}$$

$$\int x\sin\frac{k\pi x}{L}\ dx = \left|\begin{array}{cc} u = x & dv = \sin\frac{k\pi x}{L}\ dx \\ du = dx & v = -\frac{L}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L} \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{L}{k\pi}x\cos\frac{k\pi x}{L} + \int\frac{L}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L}dx = -\frac{L}{k\pi}x\cos\frac{k\pi x}{L} + \frac{L^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{L}$$

$$\sin k\pi = 0; \quad \cos k\pi = (-1)^k$$

liché číslo : $(2k-1), k \in N,$ sudé číslo: $2k$

$$\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k; \quad \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Fourierova řada periodické funkce $f(x)$

Aproximace periodické funkce trigonometrickým polynomem.
Periodická $f(x)$ s periodou $\mathbf{p = 2L}$ je zadaná na intervalu $\langle -L,\ L\rangle$

$$\mathbf{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k \sin\frac{k\pi x}{L}}, \quad \text{kde}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx,\ a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{L}dx,\ b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{L}dx$$

V případě, že:

- $f(x)$ je lichá funkce, $a_k = 0, k = 0, 1, \ldots$
- $f(x)$ je sudá funkce, $b_k = 0$

Příklad (z minulého cvičení): Čipera, 6.5 Úlohy, 3

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & x \in (0, \pi) \\ -\frac{\pi}{4} & x \in (-\pi, 0) \end{cases} \qquad p = 2\pi$$

1. Náčrt
2. Funkce je **lichá**, proto $a_k = 0, k = 0, 1, \ldots$
3. $b_k = \underbrace{\frac{1}{\pi}}_{\frac{1}{L}} \cdot \left(\int_{-\pi}^{0} -\frac{\pi}{4} \sin kx \; dx \; + \; \int_{0}^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin kx \; dx \right)$

   $b_k = \underbrace{\frac{1}{\pi}}_{\frac{1}{L}} \cdot \underbrace{2}_{\text{lichá}} \cdot \int_{0}^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin kx \; dx = -2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{k} \cdot [\cos kx]_0^{\pi}$

   $b_k = -\frac{1}{2k} \left((-1)^k - 1 \right) = \begin{cases} \frac{1}{k} & k : \text{liché} \\ 0 & k : \text{sudé} \end{cases}$
4. Fourierova řada:

   $$f(x) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\left((2k-1)x\right) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots$$

Součet Fourierovy řady

Fourierova řada omezené a po částech monotónní periodické funkce f konverguje a pro každý bod $x_\ell \in (-\infty, \infty)$, ve kterém je funkce spojitá, platí $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_K \cos \frac{k\pi x}{L} x + b_k \sin \frac{k\pi x}{L}$.
Je-li ξ bodem nespojitosti funkce f, je součet Fourierovy řady $S(\xi) = \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to\xi^-} f(x) + \lim\limits_{x\to\xi^+} f(x)\right)$

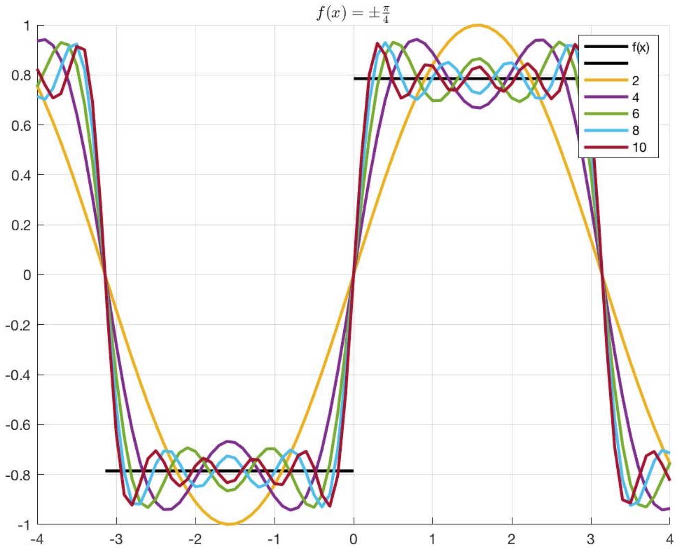
Součtem Fourierovy řady $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\left((2k-1)x\right)$ je $S(x)$:

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & x \in (-\pi, 0) \quad \text{resp.} \quad x \in (-(2k-1)\pi, 2k\pi) \\ \frac{\pi}{4} & x \in (0, \pi) \quad \text{resp.} \quad x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \\ 0 & x \in \{-\pi, 0, \pi\} \quad \text{resp.} \quad x = k\pi \end{cases}$$

Například pro $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} = \mathrm{arctg}\ 1 = \frac{\pi}{4}$$

Funkce a částečné součty

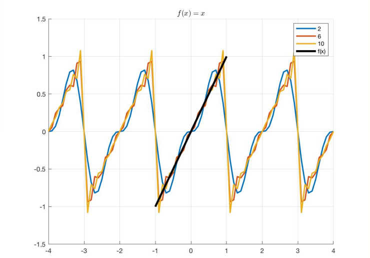


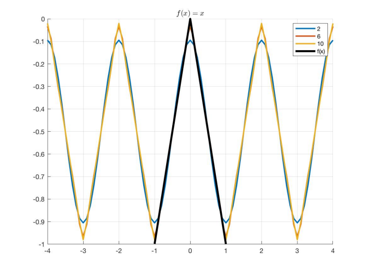
"Variace na téma" $f(x) = x$ (Čipera, př. 6,8,14)

- $f(x) = x, \quad x \in (-1, 1), \quad p = 2$

  $a_0, a_k = 0, \quad b_k = -\dfrac{2\ \cos(\pi\, k)}{k\,\pi} = -\dfrac{2}{\pi}\dfrac{(-1)^k}{k}$
- **sinový rozvoj** $f(x) = x, \quad x \in (0, 1)$ s **periodou p = 2**
- **kosinový rozvoj** $f(x) = -x, \quad x \in (0, 1)$ s **periodou p = 2**
- **kosinový rozvoj** $f(x) = x, \quad x \in (-1, 0)$ s **periodou p = 2**

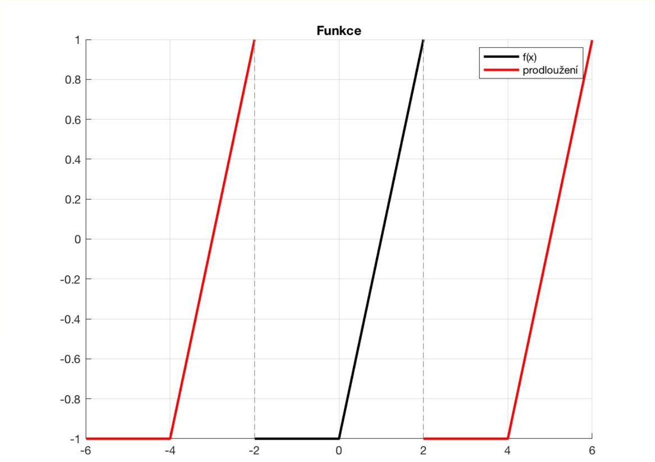
  $a_0 = -1, \ a_k = \dfrac{4}{\pi^2}\dfrac{1}{(2k-1)^2}, \ b_k = 0$

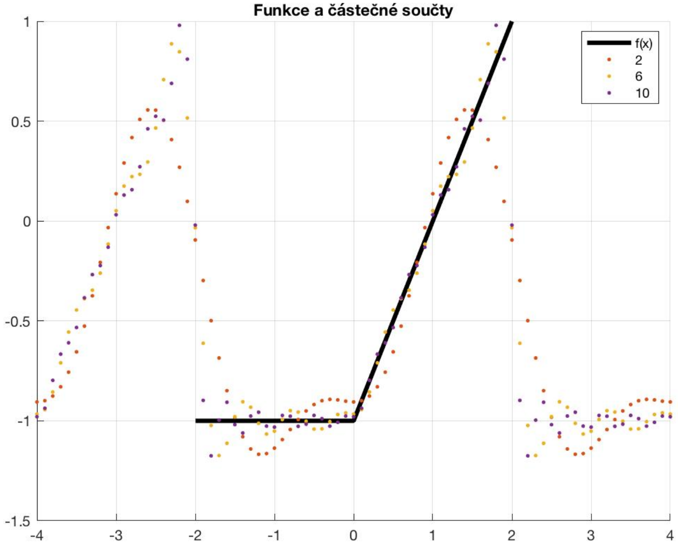


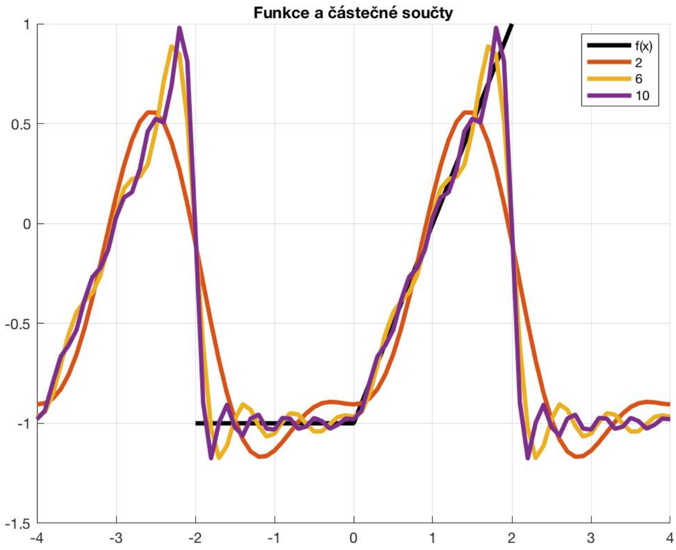


"Ani sudá, ani lichá"(Čipera, př. 10)

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-2, 0) \\ x - 1 & x \in (0, 2) \end{cases} \qquad p = 4$$




Funkce a částečné součty
f(x)
2
6
10
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4


Funkce a částečné součty
f(x)
2
6
10
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

Přítel MATLAB

```
syms x k f(x) fr(x,k)


f(x) = piecewise(-2<x<0, -1, 0<x<2, x-1);

a=-2; b=2; L=2;

a0 = int(f,x,a,b)/L
ak = int(f*cos(k*pi*x/L),x,a,b)/L
bk = int(f*sin(k*pi*x/L),x,a,b)/L

N = 3;
fr=a0/2 + symsum(ak*cos(k*pi*x/L) + bk*sin(k*pi*x/L),k,1,N
```