Cvičení 1

Matematika 3

25.9.2019

Obsah

Úvodní informace

Olga Majlingová : ÚTM, Karlovo nám., budova D, 204,
olga@majling.eu http://olga.majling.eu

- konzultace:
  - e-mailem kdykoliv,
  - konzultační hodiny: středa 14:15-15:45,
  - v jiném čase – po předběžné domluvě e-mailem
- web: `http://mat.fs.cvut.cz` odkaz Matematika **III**
  Informace k předmětu
- **sledujte informace a e-maily!**

Podmínky udělení zápočtu:

Domácí úkoly odevzdané

- všechny (min. 8)
- správně (min. 80%)
- včas

Organizace předmětu

- **Přednášky**
- **Cvičení** navazují na přednášky

na cvičení je vhodné mít s sebou **poznámky z přednášky**

na otázku můžu se zeptat? je vždy odpověď **ANO!**

Tématické okruhy:

1. Řady
2. Diferenciální rovnice

Literatura

1 S. Čipera: Řešené příklady z Matematiky 3. Nakladatelství ČVUT.

2 L. Herrmann: Obyčejné diferenciální rovnice. Řady. Komentované přednášky pro předmět Matematika III. Nakladatelství ČVUT 2006.

3 L. Herrmann: Fourierovy řady. Nakladatelství ČVUT 2006.

4 http://mat.fs.cvut.cz/wp-content/uploads/2012/01/M3zkpr.pdf

Zkouška: písemná, 4 příklady po 25 bodech.

Zkouškové období začíná 6. ledna.

Před zkouškou je nutné získat zápočet.

Posloupnosti a řady

- posloupnost:

$$\{a_k\}_{k=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, \dots, \}$$

- řada:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Otázky:

- Jak sečíst nekonečnou (přesněji spočetnou) množinu čísel?
- Platí pro nekonečné součty podobné zákony jako pro konečné součty(zákony distributivní, asociativní a komutativní)?
- Jaké operace můžeme provádět s řadami?

Pojmy

- částečné součty řady

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$$

- posloupnost částečných součtů

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Konvergence řady

Definice

Je–li posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ konvergentní,
tj. existuje–li **vlastní** limita

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S,$$

řada konverguje (resp. konverguje k S).
Neexistuje–li **vlastní** limita, **řada diverguje**.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} S \\ \infty \\ -\infty \\ \text{neexistuje} \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \begin{cases} S & \text{řada konverguje k } S \\ \infty & \text{řada diverguje k } \infty \\ -\infty & \text{řada diverguje k } -\infty \\ & \text{řada osciluje} \end{cases}$$

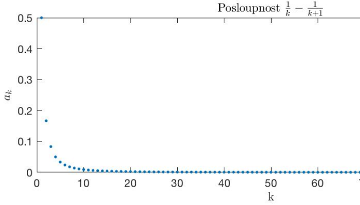
Příklad 1

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Posloupnost

$$\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \dots \right\}$$

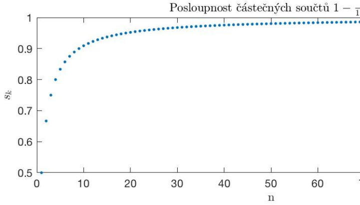
$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 0$$



Posloupnost částečných součtů

$$s_1 = \frac{1}{2}, s_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right), \dots$$

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$



$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = 1 \quad \Rightarrow \text{ řada konverguje k 1.}$$

Příklad 2

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$$

Posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{(-1)^k\right\}_{k=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$,

$\lim\limits_{k \to \infty} a_k$ neexistuje

Posloupnost částečných součtů $= \{0, 1, 0, 1, \dots\}$

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{sudé } n \\ -1 & \text{liché } n \end{cases}$$

$\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} s_n \text{ neexistuje (věta o vybrané posloupnosti)} \;\Rightarrow\; \text{řada osciluje.}}$

Harmonická řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$\begin{array}{llllllllll}
S_1 = & S_{2^0} & = & 1 \\
S_2 = & S_{2^1} & = & 1 + \frac{1}{2} \\
S_4 = & S_{2^2} & = & S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} & > & S_2 + 2 \cdot \frac{1}{4} & = & 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \\
S_8 = & S_{2^3} & = & S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} & > & S_4 + 4 \cdot \frac{1}{8} & > & S_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & = & 1 + \frac{3}{2} \\
\vdots & \vdots \\
 & S_{2^n} & = & S_{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} & > & S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2} & > & & > & S_2 + \frac{n-1}{2} = 1 + \frac{n}{2}
\end{array}$$

$$S_{2^n} > S_2 + \frac{n-1}{2} = 1 + \frac{n}{2}$$

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, tedy má limitu buď vlastní nebo $+\infty$, **stejnou**, jako **vybraná** S_{2^n}

$$\lim_{n\to\infty} 1+\frac{n}{2} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_{2^n} = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ diverguje k } \infty$$

Nutná podmínka konvergence

Věta

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{konverguje} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

OBRÁCENĚ N E P L A T Í !!!

Příklady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2k^2+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{2k^2+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ řada diverguje}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0, \text{ ALE řada diverguje}$$

Geometrická řada: konverguje? Jaký má součet?

$$\boxed{a + a\cdot q + a\cdot q^2 + \cdots + a\cdot q^k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a\cdot q^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a\cdot q^k = a\sum_{k=0}^{\infty} q^k, \quad a \neq 0, q \neq 0}$$

- $q = 1$: $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} a = a \neq 0 \Rightarrow$ řada diverguje.
- $q = -1$: řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a\cdot(-1)^{k-1} = a\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$ osciluje
- $|q| \neq 1$:

  $$s_n = a + a\cdot q + a\cdot q^2 + \cdots + a\cdot q^{n-1} = a\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right)$$

  $$a\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right)\cdot\frac{1-q}{1-q} = a\frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow \boxed{s_n = a\frac{1-q^n}{1-q}}$$

  $|q| > 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty \\ neex. \end{cases}, \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}\cdot\left(1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^n\right)$, div.

  $|q| > 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$

$$\boxed{\text{Geometrická řada } \sum_{k=1}^{\infty} a\cdot q^{k-1} \text{ konverguje k } \frac{a}{1-q} \text{ při } |q| < 1}$$

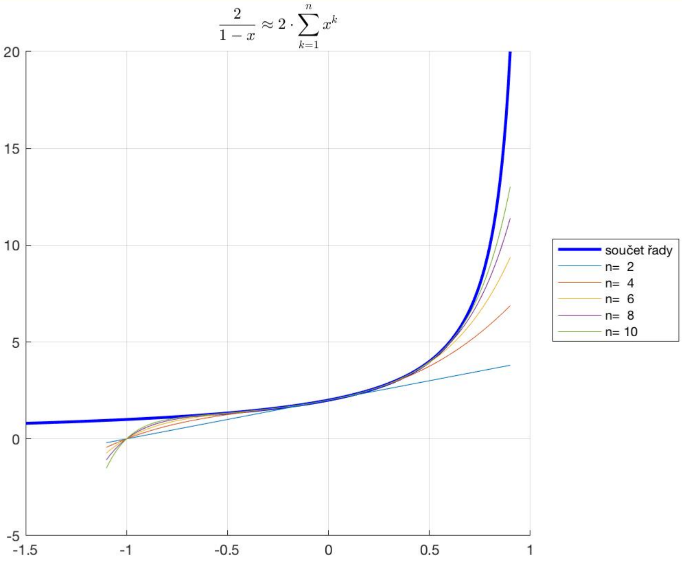
Geometrická řada

Geometrická řada $\sum_{k=1}^{\infty} a \cdot q^{k-1}$ konverguje k $\dfrac{a}{1-q}$ při $|q| < 1$

To také znamená, že $\dfrac{a}{1-q}$ pro $|q| < 1$ lze aproximovat konečným součtem $a\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right)$.

Příklad. Pro která $x \in \mathbb{R}$ je $\dfrac{2}{1-x}$ součtem geometrické řady? Jaké řady? Napište součet prvních 5 členů této řady.

Příklad



$\frac{2}{1-x} \approx 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} x^k$
20
15
10
5
0
-5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
součet řady
n= 2
n= 4
n= 6
n= 8
n= 10

Algebraické operace s řadami (s kladnými členy)

Součet konvergentních řad

Věta:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ jsou konvergentní a mají součty s, $t \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) \text{ konverguje a platí } \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = s + t.$$

ALE z konvergence $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ NEPLYNE konvergence $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Viz příklad 1:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad \text{ALE} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ diverguje}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \text{ diverguje}$$

Pouze v případě konvergentní řady smíme sdružovat členy do závorek.

Viz příklad 2:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \end{cases}$$

Násobení řady číslem

Věta:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverguje, } p \in \mathbb{R}\ (p \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot a_k \text{ konverguje}$$

$$\text{a platí: } \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot a_k = p \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Příklady

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^k - 3^{k+1}}{6^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{4^k}{6^k} - 3 \cdot \frac{3^k}{6^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
  $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1 - 2/3} = 3 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$
  $$\sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{4^k}{6^k} - 3 \cdot \frac{3^n}{6^n} = 5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 9$$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{6^k}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{6^k}$
- Víte-li, že $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$, určete $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{2^k}$

Kritéria konvergence

- Limitní d'Alembertovo kritérium
- Limitní srovnávací kritérium
- Integrální kritérium
- . . . mnoho dalších

Integrální kritérium

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy,
- funkce $f(x)$ je nerostoucí v intervalu $\langle m, \ \infty)$, $\ m \in \mathbb{N}$
- a $f(k) = a_k, \ k = m, m+1, \dots$

$$\text{Potom řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \text{konverguje } \int_m^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje} \Leftrightarrow \text{diverguje } \int_m^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Příklad: harmonická řada: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, funkce $f(x) = \frac{1}{x}$, $\ m = 1$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

Příklad: Dirichletova řada: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, funkce $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, $\ m = 1$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x, \ \alpha \neq 1, = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \dots$$

Limitní d'Alembertovo kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

Existuje-li

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,\ 0 \leq q \leq \infty,$$

potom v případě, že

$q < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

$q > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

$q = 1$ o konvergenci řady nelze tímto kritériem rozhodnout

Příklady (d'Alembertovo kritérium)

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2\cdot 2^n}\cdot\frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

řada konverguje

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{2^n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)+1}{2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{2^{\frac{n}{2}}}{3n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{3n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

řada konverguje

- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3n+1)3^n}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n\cdot 2^n}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\frac{n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n\frac{n!}{n^n}$$

Limitní srovnávací kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ a $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R}^*}$

Nechť $c \in (0, \infty)$ (**limita je vlastní a nenulová**),
potom

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje právě když konverguje } \sum_{n=1}^{\infty} b_n.}$$

Nechť $c = 0$. Potom konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nechť $c = \infty$. Potom konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Limitní srovnávací kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ a $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R}^*}$

Nechť $c \in (0, \infty)$ (**limita je vlastní a nenulová**),
potom

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje právě když konverguje } \sum_{n=1}^{\infty} b_n.}$$

Někdy srovnáváme s Dirichletovou řadou

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\text{ , která pro : } \begin{cases} \alpha > 1 & \text{konverguje} \\ \alpha \leq 1 & \text{diverguje} \end{cases}$$

VÍME, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_\ell x^\ell + \ldots}{d_m x^m + \ldots} = \begin{cases} \frac{c_\ell}{d_m} & \text{při } \ell = m \quad \text{př. } \lim_{n\to\infty} \frac{3x^5+\ldots}{2x^5+\ldots} = \frac{3}{2} \\ 0 & \text{při } \ell < m \quad \text{př. } \lim_{n\to\infty} \frac{3x^2+\ldots}{2x^5+\ldots} = 0 \\ \infty & \text{při } \ell > m \quad \text{př. } \lim_{n\to\infty} \frac{3x^5+\ldots}{2x^3+\ldots} = \infty \end{cases}$$

Příklady (limitní srovnávací kritérium)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+3}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ řady konvergují
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ řady divergují
3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n^4+n+1}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^5+1}}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

Absolutní a neabsolutní konvergence

Definice. Řekneme, že

řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

Konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **neabsolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, tj.

řada **konverguje relativně** když řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje,

ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.

Alternující řada a Leibnitzovo kritérium

Leibnitz:
Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí:
$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n, \ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Potom řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ je konvergentní.

Odhad chyby:

Pro alternující řadu platí: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k \leq a_{n+1}$

Příklady (alternující řady)

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Leibnitzova řada

  řada z absolutních hodnot: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: diverguje

  posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je nerostoucí, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

  řada konverguje relativně

  $$s_4 = \frac{-1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{5}{12}, \quad |R_4| \leq \frac{1}{5}$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)!}$

  řada konverguje absolutně

  $$s_3 = -\frac{1}{2} + \frac{4}{6} - \frac{8}{24} = -\frac{1}{6} \quad |R_3| \leq \frac{2^4}{5!}$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}}$

  diverguje

Operace s konvergentními řadami

- **Násobení nenulovým číslem**

  Nechť $\xi \in \mathbb{R},\ c \neq 0$. Potom platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi a_n$ konverguje. Přitom platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi a_n = \xi \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

- **Součet konvergentních řad**

  Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady. Potom $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ konverguje a platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

- **Přerovnání řad** Je li řada absolutně konvergentní, můžeme ji přerovnat (přeuspořádat členy řady), přeuspořádaná řada konverguje absolutně a má stejný součet.

Součin řad

Definice: Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ budeme rozumět řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k-i+1} b_i \right)$$

Mertens Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konvergují, přičemž aspoň jedna z nich absolutně. Potom

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k-i+1} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right)$$

Abel Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konvergují a jejich Cauchyův součin je také konvergentní řada. Potom platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k-i+1} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right)$$

Shrnutí

Vztah absolutni konvergence a konvergence:

$a_n \geq 0$: AK $\Leftrightarrow$ K $\qquad$ $a_n \in \mathbb{R}$: AK $\Rightarrow$ K

Aritmetické operace s řadami:

operace	stačí, když
násobek konstantou	řada konverguje
asociativita (uzávorkování)	řada konverguje
součet, rozdíl	obě řady konvergují
přerovnání (komutativita)	řada konverguje absolutně
násobení dvou řad	obě řady konvergují, alespoň jedna z nich KA

Geometrická řada

součet geometrické řady $\qquad \dfrac{a}{1-q} = a\sum_{k=0}^{\infty} q^k, \ |q| < 1$

Leibnitzova řada $\qquad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \leq a_{n+1}$

Dirichletova řada $\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ konverguje pro $a > 1$