Cvičení 13

Eliminační metoda řešení soustavy ODR 1. řádu.
Převod rovnice 2. řádu na soustavu 2 rovnic.

18.12.2019

Eliminační metoda

Z jedné rovnice vyjádříme x (nebo y), zderivujeme a x, $\dot{x}$ (resp. y, $\dot{y}$) dosadíme do druhé rovnice, tj. soustavu 2 rovnic převedeme na **jednu rovnici 2. řádu**.

Příklad 1: homogenní soustava

po složkách

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y \\ \dot{y} &= 4y + 3x \end{aligned}$$

maticově

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X$$

1. z 1. rovnice vyjádříme y $\qquad y = \dot{x} - 2x$
2. určíme derivaci $\dot{y}$ $\qquad \dot{y} = \ddot{x} - 2\dot{x}$
3. $y, \dot{y}$ dosadíme do 2. rovnice $\qquad \ddot{x} - 2\dot{x} = 4(\dot{x} - 2x) + 3x$

Upravíme rovnici 2. řádu $\qquad \ddot{x} - 6\dot{x} + 5x = 0$

- charakteristická rovnice a její kořeny: $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0,\ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$
- fundamentální systém řešení: $\varphi_1 = e^t, \varphi_2 = e^{5t}$
- obecné řešení a jeho derivace $x = C_1 e^t + C_2 e^{5t},\ \dot{x} = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t}$

Dopočítáme y: $\qquad y = \underbrace{C_1 e^t + 5C_2 e^{5t}}_{\dot{x}} \underbrace{-2(C_1 e^t + C_2 e^{5t})}_{-2x}$

Závěr. Obecné řešení soustavy je $x = C_1 e^t + C_2 e^{5t},\ y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}$

Srovnání s řešením Eulerovou metodou

Příklad 1, $\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X,$ vyřešíme Eulerovou metodou.

- vlastní čísla: $(2-\lambda)(4-\lambda)-3=0,\ \lambda^2-6\lambda+5=0, \lambda_1=1, \lambda_2=5$
- vlastní vektory: $\vec{u}_{\lambda=1}=(1,-1)^T,\ \vec{v}_{\lambda=5}=(-1,3)^T$
- fundamentální systém řešení: $\Phi_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \Phi_2 = e^{5t} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Závěr. Obecné řešení soustavy je

$$X = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Eliminační metoda, nehomogenní soustava

Příklad 2: nehomogenní soustava

po složkách

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x + y + 1 \\ \dot{y} &= -4x + 2y - 2 \end{aligned}$$

maticově

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. z 1. rovnice vyjádříme y $\qquad y = \dot{x} + 3x - 1$
2. určíme derivaci $\dot{y}$ $\qquad \dot{y} = \ddot{x} + 3\dot{x}$
3. $y, \dot{y}$ dosadíme do 2. rovnice $\qquad \ddot{x} + 3\dot{x} = -4x + 2(\dot{x} + 3x - 1) - 2$

Upravíme rovnici 2. řádu $\qquad \ddot{x} + \dot{x} - 2x = -4$

- charakteristická rovnice a její kořeny: $\quad \lambda^2 + \lambda - 2 = 0,\ \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$
- fundamentální systém řešení: $\quad \varphi_1 = e^{-2t}, \varphi_2 = e^t$
- řešení homogenní rovnice: $\quad x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$
- partikulární řešení: $\quad x_P = 2$
- obecné řešení a jeho derivace $\quad x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t + 2,\ \dot{x} = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$

Dopočítáme y:
$$y = \underbrace{-2C_1 e^{-2t} + C_2 e^t}_{\dot{x}} + \underbrace{3(C_1 e^{-2t} + C_2 e^t + 2)}_{3x} - 1$$

Závěr. Obecné řešení soustavy je

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t + 2,\ \ y = C_1 e^{-2t} + 4C_2 e^t + 5$$

Srovnání s řešením Eulerovou metodou

Příklad 2, $\dot{X} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, vyřešíme Eulerovou metodou.

- vlastní čísla: $(-3-\lambda)(2-\lambda)+4=0,\ \lambda^2+\lambda-2=0, \lambda_1=-2, \lambda_2=1$
- vlastní vektory: $\vec{u}_{\lambda=-2}=(1,1)^T,\ \vec{v}_{\lambda=1}=(1,4)^T$
- fundamentální systém řešení: $\Phi_1 = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \Phi_2 = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
- řešení homogenní rovnice: $X_H = C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
- partikulární řešení pro $B \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, tj. B je konstantní $X_P = BR = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$,

(pro jiné B viz další příklad)

Závěr. Obecné řešení soustavy je

$$X = X_H + X_P = C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Eliminační metoda, nehomogenní soustava

Příklad 3: nehomogenní soustava

po složkách

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y + e^{6t} \\ \dot{y} &= 3x + 4y - e^{6t} \end{aligned}$$

maticově

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{6t}$$

1. z 1. rovnice vyjádříme y $\qquad y = \dot{x} - 2x - e^{6t}$
2. určíme derivaci $\dot{y}$ $\qquad \dot{y} = \ddot{x} - 2\dot{x} - 6e^{6t}$
3. $y, \dot{y}$ dosadíme do 2. rovnice $\qquad \ddot{x} - 2\dot{x} - 6e^{6t} = 3x + 4(\dot{x} - 2x - e^{6t}) - e^{6t}$

Upravíme rovnici 2. řádu $\qquad \ddot{x} - 6\dot{x} + 5x = e^{6t}$

- charakteristická rovnice a její kořeny: $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0,\ \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1$
- fundamentální systém řešení: $\varphi_1 = e^{5t}, \varphi_2 = e^t$
- řešení homogenní rovnice: $x = C_1 e^{5t} + C_2 e^t$
- partikulární řešení: $x_P = Ae^{6t}, \ldots, A = \frac{1}{5}, X_P = \frac{1}{5} e^{6t}$
- obec. řešení a jeho derivace $x = C_1 e^{5t} + C_2 e^t + \frac{1}{5} e^{6t}$, $\dot{x} = 5C_1 e^{5t} + C_2 e^t + \frac{6}{5} e^{6t}$

Dopočítáme y: $y = \underbrace{5C_1 e^{5t} + C_2 e^t + \frac{6}{5} e^{6t}}_{\dot{x}} \underbrace{-2\left(C_1 e^{5t} + C_2 e^t + \frac{1}{5} e^{6t}\right)}_{-2x} - e^{6t}$

Závěr. Obecné řešení soustavy je

$$x = C_1 e^{5t} + C_2 e^t + \tfrac{1}{5} e^{6t},\ \ y = 3C_1 e^{5t} - C_2 e^t - \tfrac{1}{5} e^{6t}$$

Srovnání s řešením Eulerovou metodou

Příklad 3, $\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{6t}$, vyřešíme Eulerovou metodou.

- vlastní čísla: $(2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0,\ \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0, \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1$
- vlastní vektory: $\vec{u}_{\lambda=5} = (1,3)^T,\ \vec{v}_{\lambda=1} = (1,-1)^T$
- fundamentální systém řešení: $\Phi_1 = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \Phi_2 = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- řešení homogenní rovnice: $X_H = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- partikulární řešení: $X_P = C_1(t) e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2(t) e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a platí
$$C_1'(t) e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2'(t) e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{6t}$$
- řešíme soustavu rovnic s neznámými $C_1'(t),\ C_2'(t)$, určíme $C_1(t), C_2(t)$, dosadíme do X_P

$$\begin{array}{ll} 4C_1' e^{5t} = 0 & \Rightarrow C_1(t) = const,\ \text{např. } 0 \\ C_2' e^{t} = e^{6t} & \Rightarrow C_2' = e^{5t} \Rightarrow C_2(t) = \frac{1}{5} e^{5t} \end{array} \Rightarrow X_P = \frac{1}{5} e^{5t} e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Závěr. Obecné řešení soustavy je

$$X = X_H + X_P = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eliminační metoda, nehomogenní soustava

Příklad 4: nehomogenní soustava

po složkách

$$\begin{aligned} \dot{x} + 2\dot{y} &= x - 6y - e^{2t} \\ \dot{y} &= y - x + e^{2t} \end{aligned}$$

maticově

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

1. z 2. rovnice vyjádříme x $\qquad x = -\dot{y} + y + e^{2t}$
2. určíme derivaci $\dot{x}$ $\qquad \dot{x} = -\ddot{y} + \dot{y} + 2e^{2t}$
3. $x, \dot{x}$ dosadíme do 1. rovnice $\qquad -\ddot{y} + \dot{y} + 2e^{2t} + 2\dot{y} = -\dot{y} + y + e^{2t} - 6y - e^{2t}$

Upravíme rovnici 2. řádu $\qquad \ddot{y} - 4\dot{y} - 5y = 2e^{2t}$

- charakteristická rovnice a její kořeny: $\qquad \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,\ \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$
- fundamentální systém řešení: $\qquad \varphi_1 = e^{-t}, \varphi_2 = e^{5t}$
- řešení homogenní rovnice : $\qquad y_H = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}$
- partikulární řešení: $\qquad y_P = Ae^{2t}, \dots, A = -\frac{2}{9}$
- obecné řešení: $\qquad y_{ob} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} - \frac{2}{9} e^{2t}$

  a jeho derivace: $\qquad \dot{y}_{ob} = -C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{5t} - \frac{4}{9} e^{2t}$

Dopočítáme x: $\qquad \underbrace{C_1 e^{-t} - 5C_2 e^{5t} + \frac{4}{9} e^{2t}}_{-\dot{y}} + \underbrace{C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} - \frac{2}{9} e^{2t}}_{y} + e^{2t}$

Závěr. Obecné řešení soustavy je

$$x = 2C_1 e^{-t} - 4C_2 e^{5t} + \frac{11}{9} e^{2t},\ y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} - \frac{2}{9} e^{2t}$$

Srovnání s řešením Eulerovou metodou

Příklad 4 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ upravíme

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Řešení homogenní rovnice určíme Eulerovou metodou, $X_H = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Partikulární řešení určíme variací konstanty. Pro partikulární řešení platí

$$X_P = C_1(t) e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(t) e^{5t} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C_1'(t) e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2'(t) e^{5t} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Variace konstanty. Určíme $C_1(t), C_2(t)$: $\quad C_1(t) = \int \frac{w_1(t)}{w(t)}\, dt \quad C_2(t) = \int \frac{w_2(t)}{w(t)}\, dt$

$$w(t) = \begin{vmatrix} 2e^{-t} & -4e^{5t} \\ e^{-t} & e^{5t} \end{vmatrix} \qquad w(t) = \begin{vmatrix} -3e^{2t} & -4e^{5t} \\ e^{2t} & e^{5t} \end{vmatrix} \qquad w(t) = \begin{vmatrix} 2e^{-t} & -3e^{2t} \\ e^{-t} & e^{2t} \end{vmatrix}$$

$$w(t) = 6e^{-t} e^{5t} = 6e^{4t} \qquad w_1(t) = e^{2t} e^{5t} = e^{7t} \qquad w_2(t) = 5e^{-t} e^{2t} = 5e^{t}$$

$$C_1(t) = \int \frac{e^{7t}}{6e^{4t}}\, dt = \int \frac{1}{6} e^{3t}\, dt = \frac{e^{3t}}{18} \qquad C_2(t) = \int \frac{5e^{t}}{6e^{4t}}\, dt = \int \frac{5}{6} e^{-3t}\, dt = -\frac{5e^{-3t}}{18}$$

$$X_P = C_1(t) e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(t) e^{5t} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} e^{3t} e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{18} e^{-3t} e^{5t} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Závěr. $X_{OB} = X_H + X_P = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{11}{9} \\ -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$

Převod rovnice 2. řádu na soustavu 2 rovnic

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t)$$

převedeme na soustavu rovnic pomocí označení:

$$\begin{array}{l} x = x \\ y = \dot{x} \end{array}, \quad \text{zderivujeme} \quad \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \ddot{x} = f(t) - q(t)x - p(t)y \end{array}$$

Příklady (Čipera kap. 3, 3.4, 6-11, kap.4, 4.4, 28-31)

př.31 $\ddot{x} - 9x + x^3 = 0$

$$\begin{array}{ll} \text{substituce} & \text{soustava} \\ x = x & \dot{x} = y \\ y = \dot{x} & \dot{y} = 9x - x^3 \end{array}, \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ -x^3 \end{pmatrix}, \ \frac{dy}{dx} = \frac{9x - x^3}{y}$$

př.11 $\ddot{x} - \frac{2}{t^2}x = 0, \quad x(1) = 0, \ \dot{x}(1) = 3$

$$\begin{array}{ll} \text{substituce} & \text{soustava} \\ x = x & \dot{x} = y \\ y = \dot{x} & \dot{y} = \frac{2}{t^2}x \end{array} \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{t^2} & 0 \end{pmatrix} X, \quad X(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

"nápověda": fundamentální systém řešení: $\varphi_1 = t^2, \ \varphi_2 = \frac{1}{t}$

$$X = C_1 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \dot{\varphi}_1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}, \ t \in (0, \infty)$$

C_1, C_2 určíme z počátečních podmínek.