Cvičení 12

Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu

11.12.2019

Autonomní soustava dvou rovnic

zápis po složkách		počáteční podmínky
$\dot{x} = P(x,y)$	,	$x(t_0) = x_0$
$\dot{y} = Q(x,y)$		$y(t_0) = y_0$

Oblasti existence a jednoznačnosti řešení

Spojitost $P(x,y), Q(x,y)$ a Jacobiho matice $J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$

Pro libovolnou volbu $[x_0, y_0]$ z oblasti existence řešení a libovolné $t_0 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno maximální řešení $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ Cauchyovy úlohy definované v intervalu J. Platí $\varphi(t_0) = x_0, \psi(t_0) = y_0$

Body rovnováhy (singulární body)

Body v oblasti existence řešení, ve kterých platí $\begin{array}{l} P(x,y) = 0 \\ Q(x,y) = 0 \end{array}$

Fázové trajektorie jsou rovinné křivky, zadané parametricky rovnicemi řešení soustavy $(x = \varphi(t),\ y = \psi(t))$.

Postup řešení. Soustavu rovnic lze převést na rovnici 1. řádu:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ a řešit známými metodami.

Příklad

Je dána autonomní soustava

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\tfrac{x^2+1}{2\sqrt{y}} \\ \dot{y} &= 2x\sqrt{y}+1 \end{aligned}$$

1. Uveďte všechny oblasti, ve kterých jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti maximálního řešení.
   Pravé strany jsou spojité v $G = \{[x,y] : x \in \mathbb{R}, y \in (0,\infty)\}$.
   Jacobiho matice $J(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{y}} & \frac{x^2+1}{4y\sqrt{y}} \\ 2\sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$ je spojitá v G.
   Každým bodem G prochází právě jedna fázová trajektorie této soustavy.
2. Určete body rovnováhy dané soustavy.
   Soustava **nemá** body rovnováhy, protože $\dot{x} \neq 0$.
3. Určete rovnice fázových trajektorií této soustavy.
   $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{(2x\sqrt{y}+1)2\sqrt{y}}{x^2+1} \Rightarrow (2x\sqrt{y}+1)dx + \dfrac{x^2+1}{2\sqrt{y}}dy = 0$ (je exaktní)
   $h(x,y) : x^2\sqrt{y} + x + \sqrt{y} = C,\ C \in \mathbb{R}$

   Ověření: $\operatorname{grad} h = \left(2x\sqrt{y}+1,\ \dfrac{x^2}{2\sqrt{y}} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right)$