Cvičení 10 a 11

Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu

27.11. a 4.12. 2019

Soustava dvou rovnic s konstantními koeficienty

zápis po složkách	maticový zápis
$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1$ $\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2$	$\dot{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$$

Homogenní: $B = (0,0)^T$ nehomogenní: $B \neq (0,0)^T$

Nechť λ_1, λ_2 jsou **vlastní čísla** matice A

$\vec{u}, \vec{v}$ jim odpovídající **vlastní vektory**.

Fundamentální systém řešení $\Phi_1 = e^{\lambda_1 t}\vec{u}, \quad \Phi_1 = e^{\lambda_2 t}\vec{v}$

Obecné řešení homogenní soustavy:

$$X_H = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení X_P lze určit z rovnice $\dot{X} = \vec{0}$, tj.

$$a_{11}x_P + a_{12}y_P + b_1 = 0$$
$$a_{21}x_P + a_{22}y_P + b_2 = 0$$

Obecné řešení: $X_{OB} = X_H + X_P$

Příklad 1: Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy

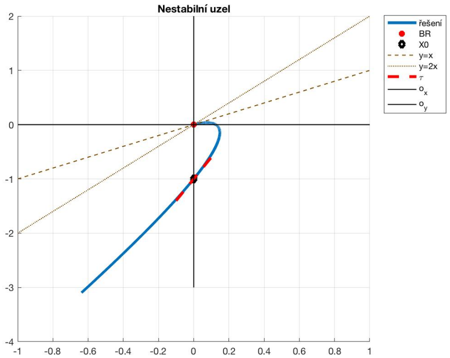
zápis po složkách	maticový zápis	počáteční podmínka
$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= -2x + 4y \end{aligned}$	$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X$	$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. vlastní čísla
   $\det(A - \lambda E) = 0$: $(1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0,$ $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$
2. vlastní vektory:
   $\lambda_1 = 2 : -x + y = 0,\ \vec{u} = (1,1)^T$ $\lambda_2 = 3 : -2x + y = 0,\ \vec{v} = (1,2)^T$
3. **Fundamentální systém řešení** $\Phi_1 = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Phi_2 = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
4. **Obecné řešení** $X_{OB} = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
5. C_1, C_2 určíme z počáteční podmínky:
   $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = -1$

   Maximální řešení (po složkách) $\begin{aligned} x(t) &= e^{2t} - e^{3t}, \\ y(t) &= e^{2t} - 2e^{3t} \end{aligned}$ $, t \in \mathbb{R}$

Fázový portrét

1. **Bod rovnováhy** $\dot{X} = \vec{0}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X_{BR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{BR} = [0,0], \text{ jediný protože } \det A \neq 0.$$
2. **Typ** bodu rovnováhy: **uzel**, protože $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$
3. **Polopřímkové trajektorie** leží na přímkách
$$-x + y = 0, \ -2x + y = 0$$
4. **Tečný vektor** v bodě $[0,-1]$: $\vec{\tau} = A(0,-1)^T = (-1,-4)^T$



Příklad 2: Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy

zápis po složkách	maticový zápis	počáteční podmínka
$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - y\\ \dot{y} &= 3x - 2y\end{aligned}$	$\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X$	$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

1. vlastní čísla
   $\det(A - \lambda E) = 0$: $(2-\lambda)(-2-\lambda) + 3 = 0$, $\qquad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$
2. vlastní vektory:
   $\lambda_1 = -1 : 3x - y = 0, \ \vec{u} = (1,3)^T \qquad \lambda_2 = 1 : x - y = 0, \ \vec{v} = (1,1)^T$
3. **Fundamentální systém řešení** $\Phi_1 = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \Phi_2 = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. **Obecné řešení** $X_{OB} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
5. C_1, C_2 určíme z počáteční podmínky:
   $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = 2, C_2 = -1$

   Maximální řešení (po složkách) $\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-t} - e^{t},\\ y(t) &= 6e^{-t} - e^{t} \end{aligned} \ , t \in \mathbb{R}$

Fázový portrét

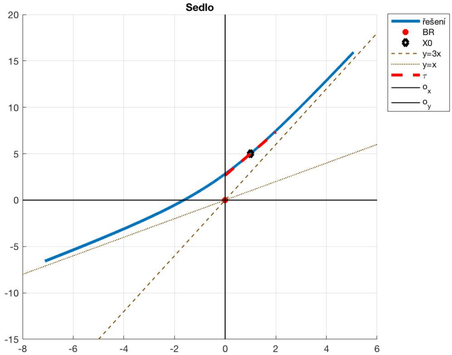
1. **Bod rovnováhy** $\dot{X} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X_{BR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{BR} = [0,0], \text{ jediný protože } \det A \neq 0.$$

2. **Typ** bodu rovnováhy: **sedlo**, protože $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$
3. **Polopřímkové trajektorie** leží na přímkách

$$3x - y = 0, \;\; x - y = 0$$

4. **Tečný vektor** v bodě $[1,5]$: $\vec{\tau} = A(1,5)^T = (-3,-7)^T$



Příklad 3: Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy

zápis po složkách	maticový zápis	počáteční podmínka
$\begin{array}{rcrcr} \dot{x} & = & 4x & + & 5y \\ \dot{y} & = & -4x & - & 4y \end{array}$	$\dot{X} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} X$	$X(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

1. vlastní čísla
   $\det(A - \lambda E) = 0$: $(4-\lambda)(-4-\lambda) + 20 = 0,\qquad \lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$
2. vlastní vektor (pro $\lambda = 2i$): $\vec{u} = (5, -4+2i)^T$
   $$e^{2it}\vec{u} = (\cos(2t) + i\sin(2t)) \begin{pmatrix} 5 \\ -4+2i \end{pmatrix}$$
   Vynásobíme a rozdělíme na reálnou a imaginární část.
3. **Fundamentální systém řešení** $\Phi_1 = Re(e^{2it}\vec{u}), \Phi_2 = Im(e^{2it}\vec{u})$
   $$e^{2it}\vec{u} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 5\cos(2t) \\ -4\cos(2t) - 2\sin(2t) \end{matrix}}_{\Phi_1} & \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} & \begin{matrix} i5\sin(2t) \\ i\,\underbrace{(2\cos(2t) - 4\sin(2t))}_{\Phi_2} \end{matrix} \end{pmatrix}$$
   $$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 5\cos(2t) \\ -4\cos(2t) - 2\sin(2t) \end{pmatrix}, \Phi_2 = \begin{pmatrix} 5\sin(2t) \\ 2\cos(2t) - 4\sin(2t) \end{pmatrix}$$

- **Obecné řešení** $X_{OB} = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2, \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

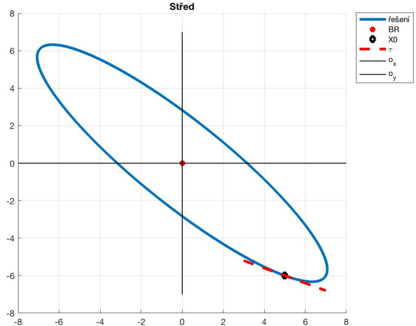
$$X_{OB} = C_1 \begin{pmatrix} 5\cos(2t) \\ -4\cos(2t) - 2\sin(2t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5\sin(2t) \\ 2\cos(2t) - 4\sin(2t) \end{pmatrix}$$

- C_1, C_2 určíme z počáteční podmínky:
  $$\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = -1$$
  Maximální řešení
  $$X_{max} = \begin{pmatrix} 5\cos(2t) \\ -4\cos(2t) - 2\sin(2t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5\sin(2t) \\ 2\cos(2t) - 4\sin(2t) \end{pmatrix}$$

  po složkách $\begin{array}{rcrcr} x(t) & = & 5\cos(2t) & - & 5\sin(2t), \\ y(t) & = & -6\cos(2t) & + & 2\sin(2t) \end{array}, \; t \in \mathbb{R}$

Fázový portrét

1. **Bod rovnováhy** $\dot{X} = \vec{0}$
$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} X_{BR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{BR} = [0, 0]$, jediný protože $\det A \neq 0$.
2. **Typ** bodu rovnováhy: **střed**, protože $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ a jsou ryze imaginární (reálné části $\lambda_{1,2} = 0$).
3. **Polopřímkové trajektorie** neexistují.
4. **Tečný vektor** v bodě $[5, -6]$: $\vec{\tau} = A(5, -6)^T = (-10, 4)^T$
5. Trajektorie řešení je **elipsa**.



Příklad 4: Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy

zápis po složkách

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= -2x + 3y \end{aligned}$$

maticový zápis

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X$$

počáteční podmínka

$$X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. vlastní čísla
   $\det(A - \lambda E) = 0$: $(1-\lambda)(3-\lambda) + 2 = 0$, $\quad \lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i$
2. vlastní vektor (pro $\lambda = 2 + i$): $\vec{u} = (1, 1+i)^T$
   $$e^{(2+i)t}\vec{u} = e^{2t}(\cos(t) + i\sin(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$
   Vynásobíme a rozdělíme na reálnou a imaginární část.
3. **Fundamentální systém řešení**
   $$\Phi_1 = e^{2t} Re((\cos t + i \sin t)\vec{u}), \Phi_2 = e^{2t} Im((\cos t + i \sin t)\vec{u})$$
   $$e^{(2+i)t}\vec{u} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & + & i \sin t \\ \cos t - \sin t & + & i(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$$
   $$\Phi_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

- **Obecné řešení** $X_{OB} = e^{2t}\left(C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2\right), \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$X_{OB} = e^{2t}\left(C_1\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}\right)$$

- C_1, C_2 určíme z počáteční podmínky:
  $$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = 2, C_2 = 1$$
  Maximální řešení
  $$X_{max} = e^{2t}\left(2\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}\right)$$

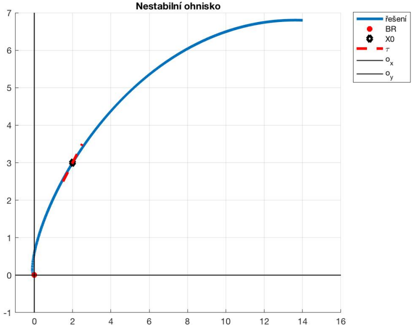
  po složkách $\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2e^{2t}(\cos t + \sin t), \\ y(t) & = & e^{2t}(3\cos t - \sin t) \end{array}, t \in \mathbb{R}$

Fázový portrét

1. **Bod rovnováhy** $\dot{X} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X_{BR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{BR} = [0,0], \text{ jediný protože } \det A \neq 0.$$

2. **Typ** bodu rovnováhy: **ohnisko**, protože $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ a nejsou ryze imaginární (reálná část $\lambda_{1,2} \neq 0$).
3. **Polopřímkové trajektorie** neexistují.
4. **Tečný vektor** v bodě $[2,3]$: $\vec{\tau} = A(2,3)^T = (5,5)^T$



Příklad 5: Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy

$$\dot{X} = AX + B$$

zápis po složkách

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + 2y + 2 \\ \dot{y} &= 3x - y - 3 \end{aligned}$$

maticový zápis

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

poč. podm.

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. vlastní čísla

   $\det(A - \lambda E) = 0$: $(-2-\lambda)(-1-\lambda) - 6 = 0$, $\quad \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1$

2. vlastní vektory:

   $\lambda_1 = -4 : x + y = 0,\ \vec{u} = (1, -1)^T \lambda_2 = 1 : -3x + 2y = 0,\ \vec{v} = (2, 3)^T$

3. **Fundamentální systém řešení**

   $$\Phi_1 = e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \Phi_2 = e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. **Obecné řešení homogenní rovnice**

   $$X_H = C_1 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

5. **Partikulární řešení** $AX_P + B = \vec{0}$

   $$\begin{aligned} -2x + 2y + 2 &= 0 \\ 3x - y - 3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned} \qquad X_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Obecné řešení nehomogenní rovnice** $X_{OB} = X_H + X_P$
  $X_{OB} = C_1 e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
- C_1, C_2 určíme z počáteční podmínky:
  $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = -3, C_2 = 1$
- **Maximální řešení** (po složkách)
  $$\begin{array}{llll} x(t) = & -3e^{-4t} & +2e^{t} & +1, \\ y(t) = & 3e^{-4t} & +3e^{t} & \end{array}, t \in \mathbb{R}$$

Fázový portrét

1. **Bod rovnováhy** $\dot{X} = \vec{0}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X_{BR} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{BR} = [1, 0], \text{ jediný protože } \det A \neq 0.$$
2. **Typ** bodu rovnováhy: **sedlo**, protože $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$
3. **Polopřímkové trajektorie** leží na přímkách
$$(x-1) + y = 0, \;\; -3(x-1) + 2y = 0$$
4. **Tečný vektor** v bodě X_0 : $\vec{\tau} = \mathbf{AX_0} + \mathbf{B}$, $\vec{\tau} = (14, -9)^T$