Cvičení 1

Matematika 3

21.09.2022

Obsah

Úvodní informace

Olga Majlingová : ÚTM, Karlovo nám., budova D, 204,
olga@majling.eu MS Teams (chat)

- web: `http://mat.fs.cvut.cz` odkaz Matematika III
  Informace k předmětu
- **sledujte informace a e-maily!**

Podmínky udělení zápočtu: příklady v moodle

`https://moodle-vyuka.cvut.cz/course/view.php?id=8174`

odevzdané

- všechny
- správně na ✓ ("zelenou fajfku")
- včas

Organizace předmětu

- **Přednášky**
- **Cvičení** navazují na přednášky

na cvičení je vhodné mít s sebou **poznámky z přednášky**

na otázku můžu se zeptat? je vždy odpověď **ANO!**

Tématické okruhy:

1. Řady
2. Diferenciální rovnice

Literatura

1 S. Čipera: Řešené příklady z Matematiky 3. Nakladatelství ČVUT.

2 L. Herrmann: Obyčejné diferenciální rovnice. Řady. Komentované přednášky pro předmět Matematika III. Nakladatelství ČVUT 2006.

3 L. Herrmann: Fourierovy řady. Nakladatelství ČVUT 2006.

4 http://mat.fs.cvut.cz/wp-content/uploads/2012/01/M3zkpr.pdf

Před zkouškou je nutné získat zápočet.

Posloupnosti a řady

- posloupnost:

$$\{a_k\}_{k=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, \ldots, \}$$

- řada:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Otázky:

- Jak sečíst nekonečnou (přesněji spočetnou) množinu čísel?
- Platí pro nekonečné součty podobné zákony jako pro konečné součty(zákony distributivní, asociativní a komutativní)?
- Jaké operace můžeme provádět s řadami?

Pojmy

- částečné součty řady

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$$

- posloupnost částečných součtů

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$$

O P A K O V Á N Í

Geometrická posloupnost

Posloupnost (reálných čísel) $\{a,\ a\cdot q,\ a\cdot q^2,\ a\cdot q^3, \dots, a\cdot q^n, \dots\}$.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \qquad a_n = a\cdot q^n, \qquad q = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad n\in\mathbb{N}$$

Příklad: které z posloupností jsou geometrické?
Jaký je jejich kvocient (q)?

a) $\left\{\dfrac{n+3}{5}\right\}_{n=1}^{\infty}$

b) $\{1-n\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\left\{\dfrac{2^n}{3^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

d) $\left\{\dfrac{n+2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Součet prvních n členů geometrické posloupnosti

$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$ vynásobíme q a odečteme

$q\cdot s_n = \ aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$

$s_n(1-q) = a\,(1-q^n) \ \Rightarrow\ s_n = a\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q},\ q\neq 1$

Limity

Limita podílu $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Používáme úpravu: čitatel a jmenovatel zlomku vydělíme nejvyšší mocninou **jmenovatele**.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_s n^s + a_{s-1}n^{s-1} + \cdots + a_0}{b_r n^r + b_{r-1}n^{r-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} \frac{a_s}{b_r} & \text{pro} \quad r = s \\ 0 & \text{pro} \quad r > s \\ \pm\infty & \text{pro} \quad r < s \\ & \qquad +\infty : a_s b_r > 0 \\ & \qquad -\infty : a_s b_r < 0 \end{cases}$$

Limita $$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{pro} \quad q \in (1, \infty) \\ 1 & \text{pro} \quad q = 1 \\ 0 & \text{pro} \quad q \in (-1, 1) \\ \text{neex.} & \text{pro} \quad q \in (-\infty, -1\rangle \end{cases}$$

Limita "1^∞"

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \text{(známá limita)}$$

- $a \neq 0, a \neq \pm\infty,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+a} = e$
- $a \neq 0, a \neq \pm\infty,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^{n} = e$
- $a \neq 0, a \neq \pm\infty,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{an} = e^a$
- $a \neq 0, a \neq \pm\infty,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n} = e^a$

Konvergence řady

Konvergence řady

Definice

Je–li posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ konvergentní,
tj. existuje–li **vlastní** limita

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S,$$

řada konverguje (resp. konverguje k S).
Neexistuje–li **vlastní** limita, **řada diverguje**.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} S \\ \infty \\ -\infty \\ \text{neexistuje} \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \begin{cases} S & \text{řada konverguje k } S \\ \infty & \text{řada diverguje k } \infty \\ -\infty & \text{řada diverguje k } -\infty \\ & \text{řada osciluje} \end{cases}$$

Geometrická řada: konverguje? Jaký má součet?

$$a + a\cdot q + a\cdot q^2 + \cdots + a\cdot q^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a\cdot q^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a\cdot q^n = a\sum_{n=0}^{\infty} q^n,\ a\neq 0, q\neq 0$$

- $q = 1$: $s_n = a\cdot n$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \Rightarrow$ řada diverguje.
- $q = -1$: $s_n = \begin{cases} 0 & \text{pro sudé } n \\ a & \text{pro liché } n \end{cases}$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje

  řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a\cdot(-1)^n = a\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ osciluje
- $|q|\neq 1$: $\boxed{s_n = a\dfrac{1-q^n}{1-q}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}\cdot\left(1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^n\right)$

  $|q| > 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty \\ neex. \end{cases}$, řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a\cdot q^n$ diverguje

  $|q| < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$

Geometrická řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a\cdot q^n$ konverguje k $\dfrac{a}{1-q}$ při $|q| < 1$

OM

Geometrická řada

Geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n$ konverguje k $\dfrac{a}{1-q}$ při $|q| < 1$

To také znamená, že $\dfrac{a}{1-q}$ pro $|q| < 1$ lze aproximovat konečným součtem $a\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right)$.

Příklad. Pro která $x \in \mathbb{R}$ je $\dfrac{2}{1-x}$ součtem geometrické řady? Jaké řady? Napište součet prvních 5 členů této řady.

$$\frac{2}{1-x} = \frac{a}{1-q} \Rightarrow a = 2, q = x; \; \frac{a}{1-q} \underbrace{=}_{|q|<1} a \sum_{n=0}^{\infty} q^n \Rightarrow \frac{2}{1-x} \underbrace{=}_{|x|<1} 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Opakování: Taylorův polynom

Taylorova věta

Nechť je funkce, která má derivace až do řádu n v uzavřeném intervalu I, jehož krajní body jsou čísla x a x_0.
Pak platí

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{T_n(x)} + R_{n+1}(x),$$

kde $R_{n+1}(x)$ je "zbytek", pro který platí

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \text{ kde } \xi \in I, \xi \neq x, x_0$$

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x - x_0)^k, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Příklad $\dfrac{2}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Aproximace $\dfrac{2}{1-x}$ konečným součtem ($\infty \approx N$). ($|x| < 1$)

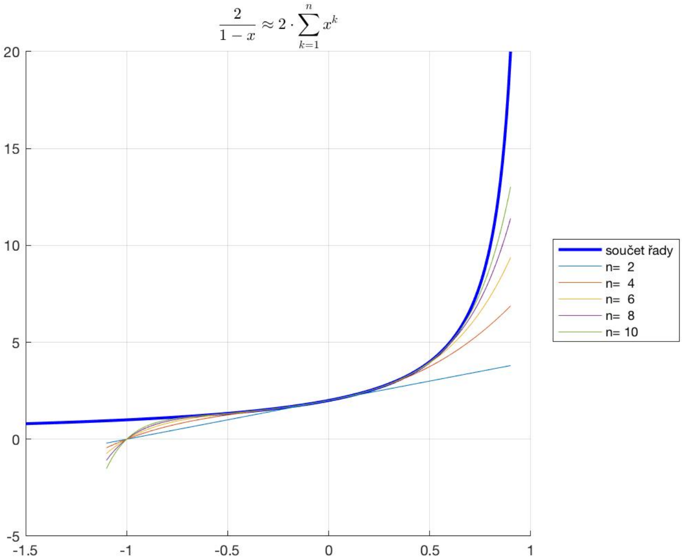
- $N = 2 : 2\sum_{n=0}^{N} x^n = 2(1 + x + x^2)$
- $N = 6 : 2\sum_{n=0}^{N} x^n = 2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$

Aproximace funkce $\dfrac{2}{1-x}$ Taylorovým polynomem stupně N se středem v bodě $x_0 = 0$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \tfrac{2}{1-x}, & f(0) &= 2, & c_0 &= 2\\
f'(x) &= \tfrac{2}{(1-x)^2}, & f'(0) &= 2, & c_1 &= 2\\
f''(x) &= \tfrac{2\cdot 2}{(1-x)^3}, & f''(0) &= 2\cdot 2, & c_2 = \tfrac{2\cdot 2}{2!} &= 2\\
f'''(x) &= \tfrac{2\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4}, & f'''(0) &= 2\cdot 2\cdot 3, & c_3 = \tfrac{2\cdot 2\cdot 3}{3!} &= 2\\
f^{(4)}(x) &= \tfrac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(1-x)^5}, & f^{(4)}(0) &= 2\cdot 2\cdot 3\cdot 4, & c_4 = \tfrac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4!} &= 2\\
f^{(5)}(x) &= \tfrac{2\cdot 5!}{(1-x)^6}, & f^{(5)}(0) &= 2\cdot 5!, & c_5 = \tfrac{2\cdot 5!}{5!} &= 2\\
f^{(6)}(x) &= \tfrac{2\cdot 6!}{(1-x)^6}, & f^{(6)}(0) &= 2\cdot 6! & c_6 = \tfrac{2\cdot 6!}{6!} &= 2
\end{aligned}
$$

- $N = 2 :\ T_2(x) = 2(1 + x + x^2) = 2\sum_{n=0}^{2} x^n$
- $N = 6 :\ T_6(x) = 2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) = 2\sum_{n=0}^{6} x^n$

Příklad: aproximace konečným součtem ($n = 2, 4, 6, 8, 10$)



Nutná podmínka konvergence

Věta

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{konverguje} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

OBRÁCENĚ N E P L A T Í !!!

Příklady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2k^2+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{2k^2+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ řada diverguje}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0, \text{ ALE řada diverguje}$$

Příklad

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Posloupnost

$$\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \dots\right\}$$

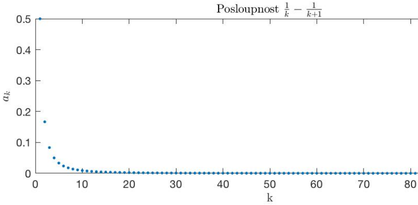
$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 0$$

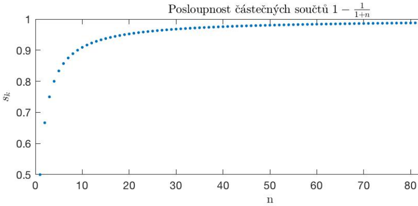
Posloupnost částečných součtů

$$s_1 = \frac{1}{2}, s_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right), \dots$$

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$





$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{řada konverguje k 1.}$$

Algebraické operace s řadami (s kladnými členy)

Součet konvergentních řad

Věta:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ jsou konvergentní a mají součty s, $t \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) \text{ konverguje a platí } \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = s + t.$$

ALE z konvergence $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ NEPLYNE konvergence $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Viz příklad 1:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad \text{ALE} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ diverguje}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \text{ diverguje}$$

Pouze v případě konvergentní řady smíme sdružovat členy do závorek.

Viz příklad 2:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \end{cases}$$

Násobení řady číslem

Věta:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverguje, } p \in \mathbb{R}\ (p \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot a_k \text{ konverguje}$$

$$\text{a platí: } \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot a_k = p \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Příklady (geometrická řada)

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^k - 3^{k+1}}{6^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{4^k}{6^k} - 3 \cdot \frac{3^k}{6^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1-2/3} = 3 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{4^k}{6^k} - 3 \cdot \frac{3^n}{6^n} = 5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 9$$

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{6^k}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{6^k}$
- Víte-li, že $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$, určete $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{2^k}$

Kritéria konvergence

- Limitní d'Alembertovo kritérium
- Limitní srovnávací kritérium
- Integrální kritérium
- . . . mnoho dalších

Integrální kritérium

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy,
- funkce $f(x)$ je nerostoucí v intervalu $\langle m, \ \infty), \ m \in \mathbb{N}$
- $f(k) = a_k, \ k = m, m+1, \ldots$

$$\text{Potom řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \text{konverguje } \int_m^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje} \Leftrightarrow \text{diverguje } \int_m^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Př.: harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, funkce $f(x) = \frac{1}{x}, \ m = 1$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

Př.: Dirichletova řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, funkce $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}, \ m = 1, \alpha \neq 1$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ldots \begin{cases} \alpha > 1 & \text{konverguje} \\ \alpha \leq 1 & \text{diverguje} \end{cases}$$

Integrální kritérium: Příklady

- $\sum_{n=2}^{\infty} \ln n$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

Limitní d'Alembertovo kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.
Existuje-li

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,\ 0 \le q \le \infty,$$

potom v případě, že

$q < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

$q > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

$q = 1$ o konvergenci řady nelze tímto kritériem rozhodnout

Příklady (d'Alembertovo kritérium)

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2\cdot 2^n}\cdot\frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

řada konverguje

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{2^n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)+1}{2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{2^{\frac{n}{2}}}{3n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{3n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

řada konverguje

- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3n+1)3^n}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n\cdot 2^n}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\frac{n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n\frac{n!}{n^n}$$

Limitní srovnávací kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ a $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R}^*}$

Nechť $c \in (0, \infty)$ (**limita je vlastní a nenulová**),
potom

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje právě když konverguje } \sum_{n=1}^{\infty} b_n.}$$

Nechť $c = 0$. Potom konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nechť $c = \infty$. Potom konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Limitní srovnávací kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ a $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R}^*}$

Nechť $c \in (0, \infty)$ (**limita je vlastní a nenulová**),
potom

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje právě když konverguje } \sum_{n=1}^{\infty} b_n.}$$

Někdy srovnáváme s Dirichletovou řadou

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ , která pro : } \begin{cases} \alpha > 1 & \text{konverguje} \\ \alpha \leq 1 & \text{diverguje} \end{cases}$$

VÍME, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_\ell x^\ell + \dots}{d_m x^m + \dots} = \begin{cases} \frac{c_\ell}{d_m} & \text{při } \ell = m \quad \text{př. } \lim_{n\to\infty} \frac{3x^5+\dots}{2x^5+\dots} = \frac{3}{2} \\ 0 & \text{při } \ell < m \quad \text{př. } \lim_{n\to\infty} \frac{3x^2+\dots}{2x^5+\dots} = 0 \\ \infty & \text{při } \ell > m \quad \text{př. } \lim_{n\to\infty} \frac{3x^5+\dots}{2x^3+\dots} = \infty \end{cases}$$

Příklady (limitní srovnávací kritérium)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+3}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ řady konvergují
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ řady divergují
3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n^4+n+1}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^5+1}}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$