Parciální diferenciální rovnice
Vlnová rovnice

Seminář 10

7.5. 2019

Vlnová rovnice

- **Úloha**

V oblasti Ω=(a, b)x(0, T), kde a, b, T$\in$R, a<b, T>0 je dána $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$, $c \in$ R, c >0

Ω=(a, b)x(0, ∞)

s **počátečními** podmínkami(**t=0**, x $\in$ <a,b>) $\quad u(x,0) = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$

a **okrajovými** podmínkami (**x=a**, **x=b**, t$\geq$0) $\quad u$(a,t) = α(t), u(b,t)=β(t)

- **Postup řešení**
  - Ověření **podmínek souhlasu** v bodech [x=a, t=0] a [x=b, t=0]:

    $\boxed{\varphi(a) = \alpha(0),\ \psi(a) = \alpha'(0) \text{ a } \varphi(b) = \beta(0),\ \psi(b) = \beta'(0)}$
  - Volba časového prostorového **kroku h** a časového **kroku τ** a ověření **stability:**

    explicitní - stabilní při $\boxed{\dfrac{c\,\tau}{h} \leq 1}$, implicitní - stabilní $\forall\tau$,h (nepodmíněně)
  - Volba **numerické metody** : **explicitní** nebo **implicitní metoda sítí.**
  - Se zvolenými kroky h, τ **vytvoříme síť:** uzly sítě jsou body $P_i^{(k)}$ =[x_i , t_k], x_i=a+ ih, t_k= τk.

    Množina uzlů $P_i^{(k)}$ tvoří při pevném k tzv. **k-tou časovou vrstvu.**

    Numerické řešení jsou vypočítané hodnoty $U_i^{(k)}$ přibližné hodnoty $u(P_i^{(k)})$ v uzlech sítě.

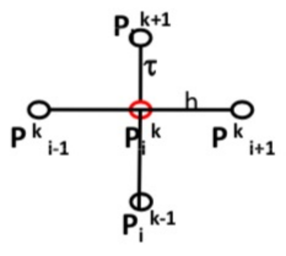
    Hodnoty $U_i^{(k)}$ určujeme ve směru rostoucího t, po jednotlivých časových vrstvách.

Nahrazení derivací v jednom uzlu: $\mathbf{P}_i^k = \mathbf{P}[x_i, t^k]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathbf{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

Druhé derivace - **centrálně**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u(P_i^{k-1}) - 2u(P_i^k) + u(P_i^{k+1})}{\tau^2} + O(\tau^2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(P_{i-1}^k) - 2u(P_i^k) + u(P_{i+1}^k)}{h^2} + O(h^2)$$



Explicitní schéma

Dosazením do rovnice a upravením dostaneme:

$$\frac{U_i^{k-1} - 2U_i^k + U_i^{k+1}}{\tau^2} = c^2 \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + f(x_i, t^k)$$

$$U_i^{k-1} - 2U_i^k + U_i^{k+1} = \frac{c^2\tau^2}{h^2}\left(U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k\right) + \tau^2 f(x_i, t^k)$$

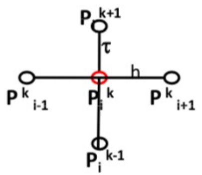
$$\boxed{U_i^{k+1} = \frac{c^2\tau^2}{h^2}\left(U_{i-1}^k + U_{i+1}^k\right) + 2\left(1 - \frac{c^2\tau^2}{h^2}\right)U_i^k - U_i^{k-1} + \tau^2 f(x_i, t^k)}$$

explicitní schéma pro $\mathbf{k \geq 2}$
$i = 1, \ldots, n-1$,

stabilní při $\boxed{\dfrac{\mathbf{c^2\tau^2}}{\mathbf{h^2}} \leq \mathbf{1}}$

Výpočet:

$U_i^0 = \varphi(x_i)$	$i = 0, \ldots, n$	počáteční podmínka
$U_0^k = \alpha(t^k)$	$k = 0, \ldots$	okrajová podmínka
$U_n^k = \beta(t^k)$	$k = 0, \ldots$	okrajová podmínka



$k = 1?$

První časová vrstva $\mathbf{U}_i^1$ s chybou $\mathcal{O}(\tau)$

Počáteční podmínka: $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$

Nahradíme derivaci $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ pro $t = 0$ dopřednou diferencí:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0)}_{\psi(x_i)} = \frac{U_i^1 - \overbrace{U_i^0}^{\varphi(x_i)}}{\tau} + \mathcal{O}(\tau)$$

$$\boxed{\mathbf{U_i^1} = \varphi(\mathbf{x_i}) + \tau\psi(\mathbf{x_i})}$$

Příklad 1

Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathbf{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1),\ t > 0$$

počáteční podmínky

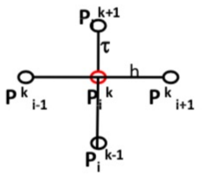
$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= x(2-x) \end{aligned}\right\} x \in \langle 0,1 \rangle$$

okrajové podmínky

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= t \\ u(1,t) &= t \end{aligned}\right\} t \geq 0$$

1. Ověření podmínek souhlasu.
2. Volba h, τ : $h = 0.2,\ \tau = 0.1$ a ověření stability.
3. Zadaný bod $A = [0.8,\ 0.2]$. Výpočet U(A).

	x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$t = 0$	U_i^0				*	U(E)	*
$t = 0.1$	U_i^1				U(B)	U(C)	U(D)
$t = 0.2$	U_i^2					U(A)	



Příklad 2

Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, +2(x+t) \quad x \in (0,7),\ t > 0$$

počáteční podmínky

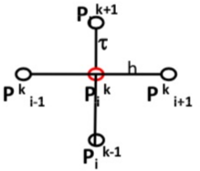
$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= x-5 \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= 2x \end{aligned}\right\} x \in \langle 0,7 \rangle$$

okrajové podmínky

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= -5 \\ u(1,t) &= 14t+2 \end{aligned}\right\} t \geq 0$$

1. Ověření podmínek souhlasu.
2. Volba h, τ : $h = 1,\ \tau = 0.5$ a ověření stability.
3. Zadaný bod $A = [2,\ 1.5]$. Výpočet U(A).

	x_i	0	1	2	3	4
$t = 0$	U_i^0	*	*	*	*	*
$t = 0.5$	U_i^1	*	*	U(E)	*	*
$t = 1$	U_i^2		U(B)	U(C)	U(D)	
$t = 1.5$	U_i^3			U(A)		



První časová vrstva s chybou $\mathcal{O}(\tau^2)$

$$u(P_i^1) \overset{Taylor}{\overbrace{=}} u(P_i^0) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(P_i^0) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(P_i^0) + \mathrm{O}(\tau^3) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P_i^0) = \frac{u(P_i^1) - u(P_i^0)}{\tau} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(P_i^0) + \mathrm{O}(\tau^2) = \psi(x_i)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(P_i^0) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^0) + f(P_i^0) =>$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(P_i^0) = c^2 \frac{u(P_{i-1}^0) - 2u(P_i^0) + u(P_{i+1}^0)}{h^2} + f(P_i^0) + \mathrm{O}(h^2)$$

$$u(P_i^0) = \varphi(x_i)$$

$$\frac{u(P_i^1) - \varphi(x_i)}{\tau} - \frac{\tau}{2}\left(c^2 \frac{\varphi(x_{i-1}) - 2\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1})}{h^2} + f(P_i^0)\right) = \psi(x_i)$$

$$\boxed{\mathrm{U}_i^1 = \frac{c^2\tau^2}{2h^2}\varphi(x_{i-1}) + (1 - \frac{c^2\tau^2}{h^2})\varphi(x_i) + \frac{c^2\tau^2}{2h^2}\varphi(x_{i+1}) + \tau\psi(x_i) + \frac{\tau^2}{2} f(P_i^0)}$$

Implicitní schéma

Odvození: v uzlu $P_i^{(k)}$ nahradíme druhou derivaci u_{tt} centrálně, druhou derivaci u_{xx} kombinací centrálních náhrad v časových vrstvách t-1, t+1:

$$\frac{U_i^{k+1}-2U_i^k+U_i^{k-1}}{\tau^2} = \frac{c^2}{2}\left[\frac{U_{i+1}^{k-1}-2U_i^{k-1}+U_{i-1}^{k-1}}{h^2}+\frac{U_{i+1}^{k+1}-2U_i^{k+1}+U_{i-1}^{k+1}}{h^2}\right]+f(x_i,t^k)$$

$$-\frac{c^2\tau^2}{2}\frac{U_{i+1}^{k+1}-2U_i^{k+1}+U_{i-1}^{k+1}}{h^2}+U_i^{k+1} = \frac{c^2\tau^2}{2}\frac{U_{i+1}^{k-1}-2U_i^{k-1}+U_{i-1}^{k-1}}{h^2}-U_i^{k-1}+2U_i^k+\tau^2 f(x_i,t^k)$$

$$-\frac{c^2\tau^2}{2h^2}U_{i-1}^{k+1}+\left(1+\frac{c^2\tau^2}{h^2}\right)U_i^{k+1}-\frac{c^2\tau^2}{2h^2}U_{i+1}^{k+1} = \frac{c^2\tau^2}{2h^2}\left(U_{i-1}^{k-1}+U_{i+1}^{k-1}\right)-\left(1+\frac{c^2\tau^2}{h^2}\right)U_i^{k-1}+2U_i^k+\tau^2 f(x_i,t^k)$$

tj. maticově $\left(\sigma^2=\frac{c^2\tau^2}{h^2}\right)$

$$\begin{pmatrix} 1+\sigma^2 & -\frac{\sigma^2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\sigma^2}{2} & 1+\sigma^2 & -\frac{\sigma^2}{2} & 0 & \vdots \\ 0 & -\frac{\sigma^2}{2} & 1+\sigma^2 & -\frac{\sigma^2}{2} & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\frac{\sigma^2}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\sigma^2}{2} & 1+\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{k+1} \\ U_2^{k+1} \\ \vdots \\ U_{n-2}^{k+1} \\ U_{n-1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\frac{\sigma^2}{2}(U_0^{k-1}+U_2^{k-1})-(1+\sigma^2)U_1^{k-1}}^{\text{hodnoty vrstvy k-1}} \quad \overbrace{+2U_1^k}^{\text{hodnoty vrstvy k}} \quad +\tau^2 f(x_1,t^k) \quad + \overbrace{\frac{\sigma^2}{2}U_0^{k+1}}^{\text{okrajová podm.}} \\ \frac{\sigma^2}{2}(U_1^{k-1}+U_3^{k-1})-(1+\sigma^2)U_2^{k-1} \quad +2U_2^k \quad +\tau^2 f(x_2,t^k) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \frac{\sigma^2}{2}(U_{n-3}^{k-1}+U_{n-1}^{k-1})-(1+\sigma^2)U_{n-2}^{k-1} \quad +2U_{n-2}^k \quad +\tau^2 f(x_{n-2},t^k) \\ \frac{\sigma^2}{2}(U_{n-2}^{k-1}+U_n^{k-1})-(1+\sigma^2)U_{n-1}^{k-1} \quad +2U_{n-1}^k \quad +\tau^2 f(x_{n-1},t^k) \quad +\frac{\sigma^2}{2}U_n^{k+1} \end{pmatrix}$$