

ODR: Cauchyova úloha

Seminář 5

26.3. 2019

Obsah

Cauchyova úloha

Postačující předpoklady existence a jednoznačnosti řešení

• $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ spojitost $f(x, y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$
v oblasti, ve které leží (x_0, y_0)

• $\begin{cases} y'_1 = f(x, y_1, y_2) \\ y'_2 = f(x, y_1, y_2) \\ y_1(x_0) = y_0^1, y_2(x_0) = y_0^2, \end{cases}$ spojitost $f(x, y_1, y_2)$, $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ a $\frac{\partial f}{\partial y_2}$

• $\begin{cases} y'' = F(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$ spojitost $F(x, y, y')$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ a $\frac{\partial F}{\partial y'}$

Převod $y'' = F(x, y, y')$ na soustavu rovnic:

označíme $\begin{matrix} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{matrix}$ zderivujeme $\begin{matrix} y'_1 = y' \\ y'_2 = y'' \end{matrix}$ tj. $\begin{matrix} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = f(x, y_1, y_2) \end{matrix}$

Aproximace funkce Taylorovým polynomem

Množinu funkcí, které mají na intervalu \mathcal{I} spojitě derivace do řádu n
označujeme $\mathcal{C}^{(n)}(\mathcal{I})$

Nechť $y = y(x)$ je v okolí bodu $x = x_0$ (resp. na intervalu $\mathcal{I} = \langle a, b \rangle$)
spojitá a má na intervalu \mathcal{I} spojitou 1. a 2. derivaci, tj. $y \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathcal{I})$

Taylorův polynom 1. stupně v okolí bodu $x_0 \in \mathcal{I}$:

$$T_1(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0),$$

Lagrangeův zbytek: $R_2(x)$

existuje ξ mezi x a x_0 , pro které $y(x) - T_1(x) = \underbrace{\frac{y''(\xi)}{2}(x - x_0)^2}_{R_2(x)}$,

pro $x = x_0 + h$

$$T_1(h) = y(x_0) + y'(x_0)h,$$

$$R_2(h) = \frac{y''(\xi)}{2}h^2$$

Asymptotický horní odhad funkce (\mathcal{O})

Definice

Mějme funkce $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$.

$$f \in \mathcal{O}(g) : \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$$

tj. $\frac{n^2}{2} + 6n + 12 \in \mathcal{O}(n^2)$, protože např. pro $c = 10$ platí:

$$\forall n > 1 \text{ (tj. } n_0 = 2) : \frac{n^2}{2} + 6n + 12 \leq 10n^2$$

Pro funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \in \mathcal{O}(g) : \exists x_0 \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall x \geq x_0 : |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$$

$$R_2(h) = \frac{y''(\xi)}{2} h^2$$

$$R_2(h) \in \mathcal{O}(h^2)$$

$$y(x+h) = y(x) + y'(x) \cdot h + \mathcal{O}(h^2)$$

$$y' = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{\mathcal{O}(h^2)}{h} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

Nahrazení derivací diferencemi

První derivace: dopředná diference:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i) \cdot h + \mathcal{O}(h^2) \Rightarrow$$

$$\frac{y(x_i+h)-y(x_i)}{h} = y'(x_i) + \frac{\mathcal{O}(h^2)}{h}, \text{ tj. } \boxed{\frac{y(x_i+h)-y(x_i)}{h} = y'(x_i) + \mathcal{O}(h)},$$

tj. první derivace je nahrazena s chybou (přesností) 1. řádu ($\mathcal{O}(h)$).

První derivace: zpětná diference:

$$y(x_i - h) = y(x_i) - y'(x_i) \cdot h + \mathcal{O}(h^2) \Rightarrow$$

$$\frac{y(x_i)-y(x_i-h)}{h} = y'(x_i) + \frac{\mathcal{O}(h^2)}{h}, \text{ tj. } \boxed{\frac{y(x_i)-y(x_i-h)}{h} = y'(x_i) + \mathcal{O}(h)},$$

tj. první derivace je nahrazena s chybou (přesností) 1. řádu ($\mathcal{O}(h)$).

Nahrazení derivací diferencemi

První derivace: centrální diference:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i) \cdot h + y''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)$$

$$y(x_i - h) = y(x_i) - y'(x_i) \cdot h + y''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)$$

Od $y(x_i + h)$ odečteme $y(x_i - h)$:

$$y(x_i + h) - y(x_i - h) = 2y'(x_i) \cdot h + \mathcal{O}(h^3)$$

vydělením $2h$ dostaneme

$$\frac{y(x_i+h)-y(x_i-h)}{2h} = y'(x_i) + \frac{\mathcal{O}(h^3)}{2h}, \text{ tj. } \boxed{\frac{y(x_i+h)-y(x_i-h)}{2h} = y'(x_i) + \mathcal{O}(h^2)},$$

tj. první derivace je nahrazena s chybou (přesností) 2. řádu ($\mathcal{O}(h^2)$).

Druhá derivace: centrální diference:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i) \cdot h + y''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2} + y'''(x_i) \cdot \frac{h^3}{3!} + \mathcal{O}(h^4)$$

$$y(x_i - h) = y(x_i) - y'(x_i) \cdot h + y''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2} - y'''(x_i) \cdot \frac{h^3}{3!} + \mathcal{O}(h^4)$$

Sečteme $y(x_i + h)$ a $y(x_i - h)$:

$$y(x_i + h) + y(x_i - h) = 2y(x_i) + 2y''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^4)$$

vydělením h^2 dostaneme

$$\frac{y(x_i+h)-2y(x_i)+y(x_i-h)}{h^2} = y''(x_i) + \frac{\mathcal{O}(h^4)}{h^2}, \text{ tj. } \boxed{\frac{y(x_i+h)-2y(x_i)+y(x_i-h)}{h^2} = y''(x_i) + \mathcal{O}(h^2)}$$

tj. druhá derivace je nahrazena s chybou (přesností) 2. řádu ($\mathcal{O}(h^2)$).

Numerické metody řešení odr

Řešení nehledáme jako spojitou funkci, definovanou na celém zkoumaném intervalu (a, b) , ale

hodnoty přibližného řešení počítáme pouze v konečném počtu bodů

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Těmto bodům říkáme **uzlové body** nebo **uzly sítě**, množině $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ říkáme **sít'**.

Rozdíl $h = x_{i+1} - x_i$ se nazývá **krok sítě** v uzlu x_i .

Přibližné hodnoty řešení v uzlových bodech, vypočtené nějakou numerickou metodou, budeme značit y_0, y_1, \dots, y_n , na rozdíl od hodnot přesného řešení, které budeme značit $y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_n)$.

Numerickým řešením je funkce, zadaná tabulkou hodnot

x_0	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots	x_n
y_0	y_1	y_2	\dots	y_i	\dots	y_n

Chceme-li znát přibližnou hodnotu řešení v jiném než uzlovém bodě, můžeme použít některou z **interpolačních metod**.

Eulerova explicitní metoda

Mějme dánu Cauchyovu (počáteční) úlohu

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

a pravidelnou síť $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ s krokem h .

Ve všech bodech sítě x_i podle rovnice platí

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$$

Derivaci na levé straně této rovnice nahradíme **dopřednou** diferencí,

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \mathcal{O}(h),$$

resp. přibližnou hodnotu $y(x_{i+1})$ **vypočítat pomocí rovnice tečny**, sestrojené v bodě $[x_i, y_i]$, která má směrnici rovnu zadané hodnotě

$$y'(x_i) = f(x_i, y_i)$$

Rovnice tečny: $y - y(x_i) = y'(x_i)(x - x_i) \Rightarrow$

$$\{y' = f(x_i, y(x_i)), \quad (x_{i+1} - x_i) = h\}$$

$$y(x_{i+1}) \doteq y_{i+1} = y(x_i) + h \cdot f(x_i, y(x_i))$$

Eulerova explicitní metoda

Nahradíme-li $y(x_i)$ přibližnou hodnotou y_i , můžeme odtud vyjádřit přibližnou hodnotu $y(x_{i+1})$ jako

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Pomocí tohoto vzorce vypočteme přibližnou hodnotu řešení v dalším uzlovém bodě pomocí hodnoty v uzlu předchozím.

Hodnotu řešení v bodě x_0 známe z počáteční podmínky, je rovna y_0 .

Řešení v následujícím bodě počítáme z hodnoty v (**jednom**) předcházejícím kroku – Eulerova metoda patří mezi **jednokrokové metody**.

Metoda konverguje, když $\forall x \in (a, b) : \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} y_n = y(x)$.

V jednom kroku metody se dopouštíme **lokální diskretizační chyby**

$$d_i = y(x_{i-1}) - y_{i-1}.$$

Globální diskretizační chyba:

jak se přibližné řešení liší od přesného – "nakupení" lokálních diskretizačních chyb.

Řád metody: $p \in \mathbb{N} : \text{lokální diskretizační chyba v každém kroku } d_i \sim \mathcal{O}(h^{p+1})$.

Pro jednokrokové metody p -tého řádu platí, že globální chyba je řádu h^p .

Eulerova metoda: jednokroková metoda prvního řádu.

Eulerova (implicitní) metoda

Ve všech bodech sítě x_i podle rovnice platí

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$$

Derivaci na levé straně této rovnice můžeme nahradit zpětnou diferencí,

$$y'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + \mathcal{O}(h),$$

a dostaneme

$$y_i - h \cdot \underbrace{f(x_i, y_i)}_{\text{neznámá } y_i} = y_{i-1}$$

Metody vyššího řádu přesnosti

Metody 2. řádu:

Collatzova metoda

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + hk_2 \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_1 &= f(x_i, y_i)\end{aligned}$$

Heunova metoda

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_2 &= f(x_i + h, y_i + hk_1) \\ k_1 &= f(x_i, y_i)\end{aligned}$$

Runge-Kutta: metoda 4.řádu přesnosti

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_4 &= f(x + h, y + hk_3) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_1 &= f(x_i, y_i)\end{aligned}$$

Příklady

① $y' = -\frac{1}{x^2}, \quad y(1) = 2$

Přesné řešení (MIII)

$$\int dy = \int \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow y = \frac{1}{x} + C \Rightarrow 2 = 1 + C \Rightarrow y = \frac{1}{x} + 1$$

Eulerova explicitní metoda: volíme $h = 0.5$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
2	1.5	$1.5 - \frac{1}{2 \cdot 1.5^2}$

② $y' = y^2 \sin(x), \quad y(0) = 2$

Přesné řešení (MIII)

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \sin x dx \dots$$

interval řešení !

Výběr délky kroku:

Volíme h , počítáme jeden krok; s krokem $h/2$ počítáme 2 kroky; porovnáme rozdíl hodnot $y_{i+1}(h)$ a $y_{i+2}(h/2)$.

Soustava diferenciálních rovnic

Označíme $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$,

Soustavu o.d.r 1. řádu (případně počáteční úlohu)

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2) & y_1(x_0) &= a \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2) & y_2(x_0) &= b \end{aligned}$$

zapišeme

$$Y' = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots) \\ \dots \end{pmatrix} \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \dots \end{pmatrix}$$

a postup řešení Eulerovou metodou aplikujeme na celý vektor.

Příklad

$$Y' = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x + y_3} \\ \sqrt{y_2 + 1} \\ y_1 - 2y_3 \end{pmatrix} \quad Y(-3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Rovnice vyššího řádu: převod na soustavu rovnic 1. řádu:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = \dots$$

Označíme $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ f(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}}_{F(x, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix})}$$

Interpretace vypočtených hodnot (podle zavedených označení!):
v prvním řádku jsou přibližné hodnoty hledané funkce, ve druhém
řádku hodnoty 1. derivace atd.

Příklad

Rovnici 3. řádu

$$y''' - \frac{1}{1-x}y' - 1 = 0 \quad \begin{array}{l} y(-2) = 1, \\ y'(-2) = 5, \\ y''(-2) = 2 \end{array}$$

převédeme na soustavu 3 rovnic

$$\begin{array}{l} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ y_3 = y'' \end{array}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \frac{1}{1-x}y_2 + 1 \end{pmatrix} \quad Y(-2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$Y' = \begin{pmatrix} 2y_1 + \frac{y_1}{y_2} \\ 2 \ln y_1 + \frac{y_2}{x} \end{pmatrix} \quad Y(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$h = 0.05$$

$$y'' = \frac{1+x}{x^2} y' - 3y \ln x \quad \begin{array}{l} y(1) = 2 \\ y'(1) = 0 \end{array}$$

$$h = 0.2$$

Příklady

1

$$y'' = 2y' - y + \frac{e^x}{x}$$

2

$$y'' = \frac{10}{x} - \frac{y'}{x} - 4\frac{y}{x^2}$$

3

$$y'' = y - 2\frac{y'}{x}$$

4

$$y''' = 2\frac{y'}{x^2}$$

5

$$y''' = 3y'' - 3y' + y$$

6

$$y'''' = 5y'' - 4y + \sin(x) \cos(2x)$$

Úlohy, které modelujeme diferenciálními rovnicemi

- Chladnutí kávy, ropná skvrna, (separovatelné rovnice)
- Znečištění rybníka (lineární 1. řádu)
- Kmitání (lineární 2. řádu)
- Pohyb planet (soustava)

Ropná skvrna

Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že poloměr roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Sestavte diferenciální rovnici popisující tento proces a vyřešte ji – tj. zjistěte, jaká funkce popisuje proces zvětšování poloměru olejové skvrny v čase.

Označme:

x ... čas

$y = y(x)$... poloměr skvrny

Rychlost růstu poloměru y je vyjádřena derivací y' . Derivace y' je tedy nepřímo úměrná funkci y^2 . Nepřímá úměrnost znamená, že existuje konstanta $k \in \mathbb{R}$, že platí:

$$y' = k \frac{1}{y^2}$$

Ropná skvrna

Řešení rovnice

$$y' = k \frac{1}{y^2}$$

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= k \frac{1}{y^2} \\ y^2 dy &= k dx \\ \frac{y^3}{3} &= kx + c \\ y^3 &= 3(kx + c) \\ y &= \sqrt[3]{3(kx + c)}\end{aligned}$$

Chladnutí kávy

Teplota kávy klesá přímo úměrně rozdílu teploty kávy T a teploty okolí T_0 .

Za jak dlouho od zalití kávy vařící vodou v místnosti s teplotou 24° ji bude možné pít? Koeficient chladnutí kávy je a .

Samočištění jezera

V jezeře je počáteční množství nečistot. Do jezera teče konstantní rychlostí čistá voda, mísí se se znečištěnou a odtéká. Průtok na odtoku je stejný jako na přítoku. Sestavte diferenciální rovnici popisující vývoj nečistot v čase. Předpokládáme, že voda je v jezeře dobře promíchávána.

Označme:

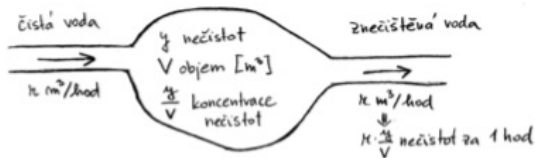
x ... čas

$y = y(x)$... množství nečistot v jezeře

y_0 ... počáteční množství nečistot

r ... průtok = množství vody, které přiteče/odteče za jednotku času (je konstantní)

V ... objem jezera (konstantní)



Rychlost úbytku nečistot v jezeře je určena derivací y' . Zároveň je vyjádřena množstvím nečistot, které z jezera odtečou za jednotku času, tj. $r \frac{y}{V}$. Rovnice popisující vývoj nečistot v čase je tedy:

$$y' = -r \frac{y}{V}, \quad y(0) = y_0$$

Jedná se o homogenní lineární rovnici, její obecné řešení je

$$y = ce^{-\frac{r}{V}x}.$$

Dosadíme počáteční podmínku:

$$y(0) = y_0 : \quad y_0 = ce^0 \implies c = y_0.$$

Vývoj nečistot v čase x je tedy určen funkcí $y = y_0 e^{-\frac{r}{V}x}$



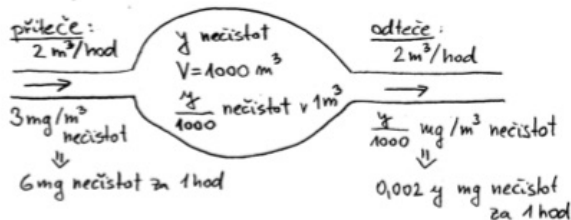
Znečišťování jezera

V jezeře je voda o objemu 1000 m^3 . Do jezera přitéká a odtéká voda stejnou konstantní rychlostí - průtok je $2 \text{ m}^3/\text{hod}$. Voda v jezeře je na počátku čistá, začne však přitékat znečištěná voda. Koncentrace nečistot na přítoku je $3 \text{ mg}/\text{m}^3$. Vaším úkolem je zachránit život v jezeře tak, že udržíte koncentraci nečistot v jezeře pod hodnotou $1 \text{ mg}/\text{m}^3$. Kolik máte času na zastavení přísunu nečistot? Předpokládejme, že voda je v jezeře dobře promíchávána.

Označme:

x ... čas

$y = y(x)$... množství nečistot v jezeře



Znečišťování jezera

Rychlost změny množství nečistot v jezeře je určena derivací y' . Zároveň je vyjádřena rozdílem nečistot, které do jezera přitečou a z jezera odtečou za jednotku času, tj. $6 - 0,002y$. Rovnice popisující vývoj nečistot v čase je tedy:

$$y' = 6 - 0,002y, \quad y(0) = 0$$

Rovnici můžeme řešit buď jako lineární nebo se separovanými proměnnými:

$$\begin{aligned}\frac{1}{6 - 0,002y} dy &= dx \\ \frac{-0,002}{6 - 0,002y} dy &= -0,002 dx \\ \ln(6 - 0,002y) &= -0,002x + c \\ 6 - 0,002y &= Ce^{-0,002x} \\ y &= 500(6 - Ce^{-0,002x})\end{aligned}$$

Dosadíme podmínku:

$$y(0) = 0 : \quad 0 = 500(6 - C) \implies C = 6 \implies y = 3000(1 - e^{-0,002x})$$

Znečišťování jezera

Zbývá zjistit, v jakém čase x dosáhne koncentrace nečistot v jezeře hodnoty 1 mg/m^3 . Koncentrace je dána podílem $\frac{y}{1000}$, tedy množství nečistot odpovídající koncentraci 1 mg/m^3 je $y = 1000 \text{ mg}$. Do vztahu $y = 3000(1 - e^{-0,002x})$ dosadíme tedy $y = 1000$ a vypočteme odpovídající x :

$$1000 = 3000(1 - e^{-0,002x})$$

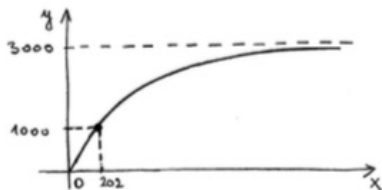
$$\frac{1}{3} = 1 - e^{-0,002x}$$

$$e^{-0,002x} = \frac{2}{3}$$

$$-0,002x = \ln(2/3)$$

$$x = -500 \ln(2/3) = 500 \ln(3/2) \approx 202$$

Přísun nečistot je potřeba zastavit do 202 hodin, tj. do 8 dní 10 hodin.



Kmitání

Rovnicí

$$my'' + ky = 0$$

jsou popsány nevynucené (vlastní) kmity hmotného bodu o hmotnosti m , zavěšeného na pružině o tuhostosti k .

Kořeny charakteristické rovnice $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$, tvar vlastních kmitů je dán obecným řešením

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

Jsou-li C_1, C_2 obě nenulové, můžeme upravit na tvar

$$y = A \sin(\omega x + \alpha),$$

kde $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2}$.

Tedy amplituda nevynucených kmitů je A , jejich frekvence ω .

$$C_1 = A \sin \alpha, C_2 = A \cos \alpha, \beta = \omega x,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Tlumené kmity

Rovnicí

$$my'' + cy' + ky = 0$$

jsou popsány nevynucené tlumené kmity hmoty m zavěšené na pružině tuhosti k při vazkém tření c . ($m, k, c > 0$)

Tvar vlastních kmitů je dám obecným řešením

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x),$$

kde $\alpha = -\frac{1}{2} \frac{c}{m}$, $\omega = \sqrt{\frac{4km - c^2}{4m^2}}$, $4km - c^2 > 0$

Řešení opět lze upravit na tvar

$$y = Ae^{\alpha x} \sin(\omega x + \varphi)$$

Tlumené kmity hmoty m jsou popsány funkcí obecného řešení, amplituda $F = Ae^{\alpha x}$ klesá exponenciálně s časem x ($\alpha < 0$),

frekvence je ω počáteční fáze $\varphi = \arctg \frac{C_1}{C_2}$

Pohyb planety

Pohyb tělesa v gravitačním poli nehybného centrálního tělesa.

Celou úlohu omezíme na pohyb v rovině. Mějme nehybné těleso o hmotnosti M v počátku souřadnic. Okolo tohoto tělesa se pohybuje druhé těleso o hmotnosti m , které se v daný okamžik nachází v bodě o souřadnicích $\vec{r} = [r_x, r_y]$ a má rychlost $\vec{v} = (v_x, v_y)$. Na toto těleso působí gravitační síla

$$F = \kappa \frac{mM}{r^3} \vec{r}, \quad r^3 = \left(\sqrt{r_x^2 + r_y^2} \right)^3$$

Pohybový zákon (zrychlení je úměrné síle) \rightarrow pohybová rovnice 2. řádu.

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{F(\vec{r})}{m}$$

Zavedením rovnice pro rychlost převedeme na soustavu rovnic 1.řádu.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{F(\vec{r})}{m} \end{aligned}$$

zapsáno po složkách

$$\begin{aligned} r'_x &= v_x \\ r'_y &= v_y \\ v'_x &= \frac{F_x}{m} = \frac{\kappa M}{\left(\sqrt{r_x^2 + r_y^2} \right)^3} r_x \\ v'_y &= \frac{F_y}{m} = \frac{\kappa M}{\left(\sqrt{r_x^2 + r_y^2} \right)^3} r_y \end{aligned}$$

Označíme

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix},$$

derivace:

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \frac{\kappa M}{r^3} r_x \\ \frac{\kappa M}{r^3} r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \frac{\kappa M}{(y_1^2 + y_2^2)^3} y_1 \\ \frac{\kappa M}{(y_1^2 + y_2^2)^3} y_2 \end{pmatrix}$$

Dodáme počáteční podmínky: počáteční polohu a rychlost tělesa.
Můžeme řešit numerickými metodami.

Zobrazení řešení: pro hodnoty t , ve kterých jsme počítali, jsou v prvním a druhém řádku vypočítány x -ové a y -ové souřadnice trajektorie pohybu.

Řešení v Matlabu symbolických proměnných, pomocí funkce `dsolve`

Parametry `dsolve` jsou:

- diferenciální rovnice, např. $y' = \frac{x^3}{y}$
- počáteční podmínka, např. $y(1) = 1$
- nezávisle proměnná, v našem př. x

Výsledek je symbolická proměnná.

```
ysym = dsolve('Dy = x^3 / y' , 'y(1)=1' , 'x')
```

Když nezadáme počáteční podmínku, funkce určí obecné řešení. Samozřejmě, ne vždy se podaří přesné řešení určit v symbolických proměnných.

Řešení v Matlabu Eulerovou numerickou metodou

- Zadáme funkci pravé strany $f(x,y)$ rovnice $y' = f(x,y)$
- Zadáme krok h , počáteční podmínku x_0, y_0 ($y(x_0) = y_0$) a poslední x -ovou hodnotu x_N .
- Vytvoříme si vektor x -ových hodnot x_E
a místo pro výpočet přibližných hodnot řešení $y(x)$: y_E .
- Na místo $y_E(1)$ uložíme počáteční hodnotu y_0 ,
ostatní $y_E(k)$ spočítáme Eulerovou metodou.

```
f = @(x,y) x.^3 ./ y
h = 0.1; x0 = 1; y0 = 1; xN = 5;
xE = x0 : h : xN;
yE = zeros(1, length(xE));
for k = 1 : length(yE) - 1
    yE(k+1) = yE(k) + h*f(xE(k),y(k))
end
```

Řešení v Matlabu numerickou metodou, kterou realizuje funkce ode45

- Funkci, která odpovídá pravé straně diferenciální rovnice, zadáváme stejně, jako pro Eulerovu metodu,
jmeno_funkce = @(x, y) vyraz
- Počáteční podmínku a poslední x -ovou hodnotu také stejně
 $x_0 = \dots$; $y_0 = \dots$; $x_N = \dots$;
- Funkce ode45 vrácí vektor-sloupec hodnot nezávisle proměnné a vektor-sloupec hodnot řešení.

```
[xM yM] = ode45 ( f, [ x0 xN ], y0 );
```

Zobrazení řešení

V Matlabu lze pro vykreslení grafu použít funkci `plot`. Podrobnější informace získáte pomocí `help plot` nebo `doc plot`.

Stejnou funkcí lze zobrazit i výsledek, získaný v symbolických proměnných, když do `ysym` dosadíme (pomocí funkce `subs`) x -ové hodnoty, například z výsledku použití `ode45`.

```
yysym = double(subs(ysym, xM));
```

```
figure  
hold on  
grid on  
plot(xM, yysym)  
plot(xE, yE)  
plot(xM, yM)  
legend('symbolicke', 'Eulerova', 'ode45')  
title('Grafy reseni')
```