Trojný integrál

1. dubna 2019

Obsah

Trojrozměrný Riemannův integrál na kvádru

Mějme funkci tří nezávisle proměnných $u = f(x, y, z)$ spojitou a ohraničenou v kvádru

$$G = \{(x, y, z : x \in \langle a, b\rangle, y \in< \langle c, d\rangle, z \in \langle e, h\rangle\}$$

.

$$\iiint_G f(x, y, z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Integrál počítáme převedením na trojnásobný – trojnásobnou integrací funkce jedné proměnné.

$$\iiint_G\ f(x, y, z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b\ \left(\int_c^d \left(\int_e^h\ f(x, y)\ \mathrm{d}z\right)\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Příklady

1. $$I = \iiint_G \ln x^{yz}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$
$$G = \{[x,y,z] : x \in \langle 1,2\rangle,\ y \in \langle 0,\ 1\rangle,\ z \in \langle 0,\ 1\rangle$$

$$I = \int_1^2 \int_0^1 \int_0^1 yz \ln x\ \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$
$$\int_1^2 \ln x \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 y\mathrm{d}y \cdot \int_0^1 z\ \mathrm{d}z = \dots \qquad = \frac{1}{4}(2\ln 2 - 1)$$

2. $$I = \iiint_G \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$
$$G = \{[x,y,z] : x \in \langle 1,2\rangle,\ y \in \langle 1,\ 2\rangle,\ z \in \langle 1,\ 2\rangle$$

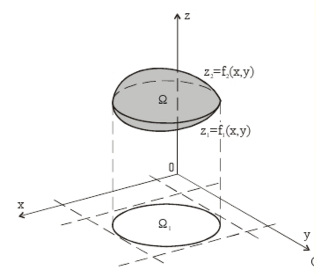
$$I = \int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \dots \qquad = 6\ln 2$$

Trojrozměrný integrál v obecné uzavřené oblasti Ω – EOI

Ω je ohraničena uzavřenou plochou, která sama sebe neprotíná; rovnoběžky s osou z, vedené jejími vnitřními body, ji protínají ve dvou bodech.
Pravoúhlý průmět Ω_1 oblasti Ω do roviny os xy je měřitelná uzavřená množina v $\mathbb{E}_2$,
$z=f_1(x,y)$ a $z=f_2(x,y)$ jsou spojité funkce na Ω_1, pro které platí: $f_1(x,y) \leq f_2(x,y), \forall\, [x,y] \in \Omega_1$.
Pak množinu

$$\Omega = \{[x,y,z]\} \in \mathbb{E}_3, f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\}$$

nazýváme EOI vzhledem k rovině xy.



Určení oblasti nerovnicemi provedeme následujícím způsobem.
Určíme-li pravoúhlý průmět výše popsané uzavřené plochy do roviny os xy, pak dotyková válcová plocha rozdělí danou uzavřenou plochu na dvě části, které lze vyjádřit rovnicemi $z = f_1(x,y)$ a $z = f_2(x,y)$.
Platí $f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)$, tj. $z \in \langle f_1(x,y), f_2(x,y)\rangle$.
Pravoúhlým průmětem dané uzavřené plochy do souřadnicové roviny os xy je rovinná oblast Ω_1, která EOI vzhledem k ose x nebo vzhledem k ose y.
Stejným způsobem jako pro dvojný integrál lze stanovit nerovnice, které vyjadřují oblast Ω_1 jako EOI vzhledem k ose x, respektive ose y.

Pořadí integrace

Jestliže je funkce $f(x, y, z)$ spojitá v elementární prostorové oblasti

$$\Omega : \quad \left.\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} x_1 \leq x \leq x_2 \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \Omega_1 \\ \mathrm{EOI}_x \end{array} \\ f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y) \end{array}\right\} \mathrm{EOI}_{xy},$$

pak platí:

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z)\, \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Pro převedení na trojnásobný integrál je nutné oblast Ω analyticky vyjádřit v takovém tvaru, aby :

meze vnějšího integrálu byly konstantní,

meze prostředního integrálu mohou být funkcí jedné proměnné

a meze vnitřního integrálu mohou být funkcí dvou proměnných.

Obvykle postupujeme tak, že nejprve vyjádříme meze proměnné z.

Pak určíme pravoúhlý průmět Ω_1 integrační oblasti Ω do souřadnicové roviny os xy: $\iiint_\Omega f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Omega_1} \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Oblast Ω_1 nakonec vyjádříme jako EOI vzhledem k ose x nebo jako EOI vzhledem k ose y, jako pro dvojný integrál.

Příklad: určení nerovnic

Nerovnice určující prostorovou oblast Ω , která je ohraničena rovinami $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ 2x + 2y + z - 6 = 0.$

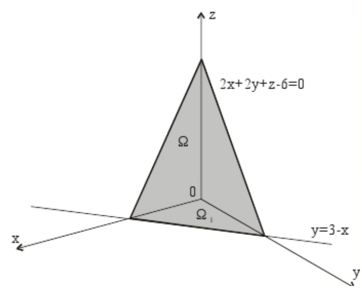
Nerovnice pro z: $0 \le z \le 6 - 2x - 2y$

Pravoúhlý průmět Ω do roviny $z = 0$:

$2x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow x + y = 3$

$$\boxed{\Omega_1 : \begin{array}{c} x + y \le 3 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}}$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Omega_1} \int_0^{6-2x-2y} f(x,y,z)\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



nerovnice v rovině $z = 0$: např.

$0 \le x \le 3$

$0 \le y \le 3 - x$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{6-2x-3y} f(x,y,z)\ \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Příklad: určení nerovnic

Nerovnice určující prostorovou oblast Ω , která je ohraničena plochami dvou paraboloidů $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad z = 4 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

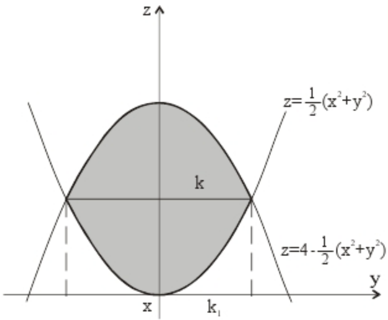
Nerovnice pro z:

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 4 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Pravoúhlý průmět Ω do roviny xy :
$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 4 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

$$\Omega_1 : x^2 + y^2 \leq 4$$

$$-2 \leq x \leq 2 \qquad x = r\cos\varphi$$
$$-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \qquad y = r\sin\varphi$$



$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Omega_1} \int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{4-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Příklad: výpočet

Vypočtěte integrál $\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

Ω je ohraničena plochami

$x=0, y=0, z=0, x+y=2, x+y-z=0.$

Řešení

- nerovnice pro z : $0 \le z \le x+y$
- průmět: $x=0,\ y=0,\ x+y=2$
- nerovnice pro x, y: $\begin{array}{l} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2-x \end{array}$
- zápis trojnásobného integrálu:

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{x+y} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

- integrace

$$\int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{x+y} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \dots$$

Příklady

https://mat.nipax.cz/_media/trojny_19.pdf

347 – 351

Transformace v trojrozměrném integrálu

Pro vyjádření integrační oblasti, kterou tvoří rotační (nebo eliptický) **válec** nebo jeho část, případně **koule** nebo její část (elipsoid nebo její část) jsou vhodné **válcové (cylindrické)** nebo **sférické** souřadnice.

Obecně jsou transformace v trojrozměrných integrálech dány rovnicemi

$$x = u(r,s,t), y = v(r,s,t), z = w(r,s,t),$$

kde funkce $u(r,s,t), v(r,s,t), w(r,s,t)$, $\Omega^* \to \Omega$, jsou spojitě diferencovatelné v Ω^*
V trojrozměrném integrálu platí

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega^*} f(u(r,s,t), v(r,s,t), w(r,s,t))|J|\mathrm{d}r\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

kde jakobián $|J| \neq 0 \text{ v } \Omega^*$.

Pro jakobián transformace platí

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

podrobněji **skripta II.9, str.71**

Transformace do válcových souřadnic

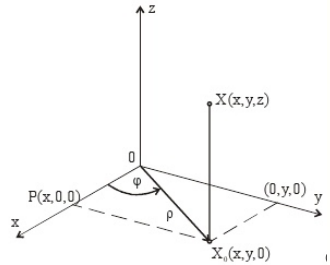
Trojici kartézských souřadnic x, y, z nahradíme trojicí válcových souřadnic r, φ, w . Význam válcových souřadnic r a φ je stejný jako v případě polárních souřadnic u dvojrozměrných integrálů, třetí souřadnice z se nemění.

V trojúhelníku OPX_0 platí $\cos\varphi = \frac{x}{r},\ \sin\varphi = \frac{y}{r}$.

Odtud pro $r \neq 0$ platí $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$.

Transformační rovnice:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = w$$



Pro jakobián transformace platí: $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$

Transformace do sférických souřadnic

Trojici kartézských souřadnic x, y, z

nahradíme trojicí sférických souřadnic r, φ, ϑ.

Význam souřadnic r, φ, ϑ:

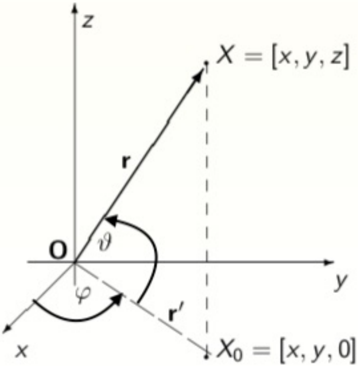
r : $(r \geq 0)$ vzdálenost bodu $X = [x, y, z]$ od počátku soustavy souřadnic.

φ: orientovaný úhel měřený v souřadnicové rovině os xy od kladného směru osy x po průvodič bodu $[x, y, 0]$ v kladném smyslu.

ϑ: orientovaný úhel od průvodiče bodu $[x, y, 0]$ po průvodič bodu $[x, y, z]$ v kladném smyslu.

Transformační rovnice

$$x = r\ \cos\vartheta\ \cos\varphi$$
$$y = r\ \cos\vartheta\ \sin\varphi$$
$$z = r\ \sin\vartheta$$
$$dxdydz = r^2\cos\vartheta\ drd\varphi d\vartheta$$



v rovině xy :

ΔOAX_0

$A = [x, 0, 0]$

$$x = r'\cos\varphi$$
$$y = r'\sin\varphi$$

v rovině $z\overline{OX_0}$:

ΔXOX_0

$$r' = r\cos\vartheta$$
$$z = r\sin\vartheta$$

Příklady

https://mat.nipax.cz/_media/trojny_19.pdf

358 – 363

řešené : 352 – 357

Aplikace trojrozměrného integrálu

- **Objem tělesa** Ω: $V = \iiint_\Omega \mathbf{1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- **Hmotnost tělesa** určeného oblastí Ω, jehož hustota v každém bodě $X(x, y, z)$ je dána funkcí $\rho = \rho(x, y, z)$, je určena vztahem

$$m = \iiint_\Omega \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

- **Statický moment** tělesa vzhledem k
  - rovině xy: $m_{xy} = \iiint_\Omega \mathbf{z}\,\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
  - rovině yz: $m_{yz} = \iiint_\Omega \mathbf{x}\,\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
  - rovině xz: $m_{xz} = \iiint_\Omega \mathbf{y}\,\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- Souřadnice **těžiště** $T = (T_x, T_y, T_z)$ tělesa Ω jsou

$$T_x = \frac{m_{yz}}{m} \quad T_y = \frac{m_{xz}}{m} \quad T_z = \frac{m_{xy}}{m}$$

Moment setrvačnosti

- **Moment setrvačnosti** tělesa Ω vzhledem k
  - rovině xy: $J_{xy} = \iiint_\Omega \mathbf{z^2}\ \rho(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
  - rovině yz: $J_{yz} = \iiint_\Omega \mathbf{x^2}\ \rho(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
  - rovině xz: $J_{xz} = \iiint_\Omega \mathbf{y^2}\ \rho(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- **Moment setrvačnosti** tělesa Ω rotujícího kolem
  - osy x: $J_x = \iiint_\Omega (y^2 + z^2)\ \rho(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
  - osy y: $J_y = \iiint_\Omega (x^2 + z^2)\ \rho(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
  - osy z: $J_z = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)\ \rho(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- **Moment setrvačnosti** tělesa Ω vzhledem k počátku
  - $J_0 = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\ \rho(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Příklady

https://mat.nipax.cz/_media/trojny_19.pdf

380 – 423

řešené : 365 – 379