# Funkce zadané implicitně

4. března 2019

# Parciální derivace druhého řádu

Parciální derivace druhého řádu funkce $z = f(x, y)$ jsou definovány:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nazýváme smíšené parciální derivace.

**Věta** Jsou-li smíšené parciální derivace spojité v bodě $A$, pak jsou si v tomto bodě rovny.

- $z = x^2 y + \frac{y^3}{x^4}$
- $z = x^2 + xy + y^2 - 3$

# Příklad

$z = x^2 + xy + y^2 - 3$

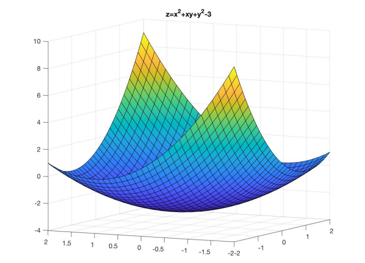
Matice kvadratické plochy

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -3 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \neq 0$$
$$\delta = 0$$
$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}$$
$$\lambda_3 = \frac{3}{2}$$

PLOCHA

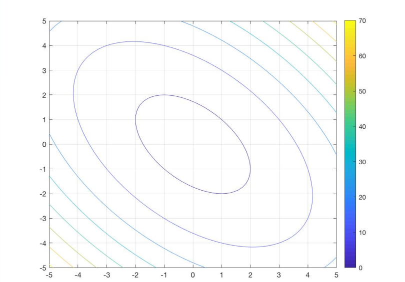
$z = x^2 + xy + y^2 - 3$




PARABOLICKÁ

IZOKŘIVKY

$z = const \Rightarrow x^2 + xy + y^2 = C$



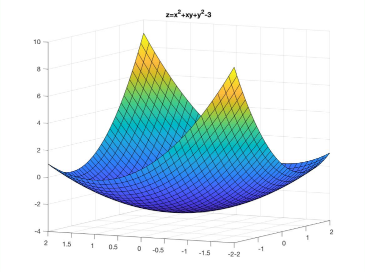
ELIPSY

# Je jedna izokřivka funkce?

$z = x^2 + xy + y^2 - 3$

$z = F(x, y)$

PLOCHA




PARABOLICKÁ

ALE v okolí bodu $[1,1] \in \mathcal{D}(F)$

**je** rovnicí $F(x, y) = 0$

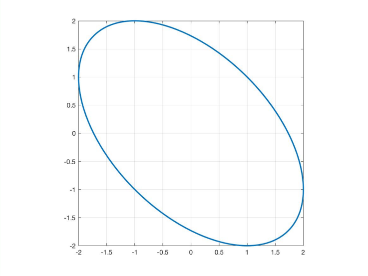
definovaná funkce

jedné proměnné $(y = g(x))$

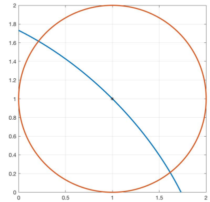
$z = 0 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 = 3$

$y \stackrel{?}{=} g(x)$

jedna izokřivka



obecně $F(x, y) = C$ není funkce



# $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ v okolí $[1, 1]$

Rovnicí $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ v okolí $[1, 1]$ je definovaná funkce jedné proměnné , ale $y = g(x)$ neumíme z rovnice vyjádřit. Vlastnosti funkce $y = g(x)$ zjistíme z derivací této funkce.

Derivace 1. řádu.

zderivujeme rovnici: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2 + xy(x) + y^2(x) - 3\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(0)$

$$\begin{aligned} 2x + y(x) + \underline{xy'(x)} + \underline{2y(x)y'(x)} &= 0 \\ y'(x + 2y(x)) &= -2x - y(x) \end{aligned}$$

a vyjádříme $y'(x) = -\dfrac{2x + y(x)}{x + 2y(x)}$.

Derivace 2. řádu: zderivujeme derivaci

$$y'' = -\frac{(2 + y'(x))(x + 2y(x)) \; - \; (2x + y(x))(1 + 2y'(x))}{(x + 2y(x))^2}$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Pro funkci $y = g(x)$ | $y(1)$ | $=$ | $1$ | | |
| v bodě $x = 1$ | $y'(1)$ | $=$ | $-1$ | $\Rightarrow$ | klesající |
| platí: | $y''(1)$ | $=$ | $-\frac{2}{3}$ | | konkávní |

# Funkce, zadaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$

$$z = F(x, y) \qquad F(x, y) = 0$$

Pro funkci dvou proměnných je rovnicí $F(x, y) = 0$ popsána izokřivka.
Pokud v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathcal{D}(F) \subseteq \mathbb{R}^2$ platí:

1. $F(A) = 0$, tj. bod $A$ leží na izokřivce,
2. $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \ \dfrac{\partial F}{\partial y}$ jsou spojité v okolí bodu $A$,
3. $\dfrac{\partial F(A)}{\partial y} \neq 0$,

potom existuje $R$-okolí bodu $A$, ve kterém je rovnicí $F(x, y) = 0$ (**implicitně**) určena jediná funkce **jedné** proměnné $y = g(x)$, která má spojitou derivaci, a pro kterou platí $y_0 = g(x_0)$.
Definiční obor funkce $g(x)$, $\mathcal{D}(g) \subseteq \mathbb{R}$, $x \in (x_0 - R, \ x_0 + R)$.

# Derivace funkce jedné proměnné, zadané implicitně

Rovnici $F(x,y)=0$, kde $y=g(x)$ tj. rovnici $F(x,g(x))=0$

derivujeme: $\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot g'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y}g'(x)=-\frac{\partial F}{\partial x}$

a vyjádříme $g'(x)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ v bodě $x_0$ platí: $y_0=g(x_0)$, $g'(x_0)=-\dfrac{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}}$

Používáme označení:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=F_x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=F_y,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=F_{xx},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=F_{xy},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=F_{yy}$$

Zderivovanou rovnici $F_x+\underbrace{F_y\cdot g'(x)}_{\text{součin}}=0$ derivujeme

podruhé $\underbrace{F_{xx}+F_{xy}\cdot g'(x)}_{\text{derivace } F_x}+\underbrace{(F_{yx}+F_{yy}\cdot g'(x))}_{\text{derivace } F_y}\cdot g'(x)+F_y\cdot g''(x)=0$

$$F_{xx}+2F_{xy}\cdot g'(x)+F_{yy}\cdot\left(g'(x)\right)^2+F_y\cdot g''(x)=0$$

Použijeme vyjádření první derivace a osamostatníme $g''(x)$.

# Druhá derivace

Pro druhou derivaci $g''(x)$ platí:

$$g''(x) = \frac{1}{(F_y)^3} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix}$$

# Připomenutí

Známe-li první a druhou derivaci funkce jedné proměnné $g(x)$ v bodě $x_0$, můžeme určit:

- rovnici tečny ke grafu funkce v bodě dotyku $[x_0, y_0]$

$$t : y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0) \quad \text{tj. } y = y_0 + g'(x_0)(x - x_0)$$

- rovnici normály

$$n : y - y_0 = -\frac{1}{g'(x_0)}(x - x_0) \quad \text{tj. } y = y_0 - \frac{1}{g'(x_0)}(x - x_0)$$

- lokální extrémy např. je-li $g'(x_0) = 0$ a $g''(x_0) > 0$ je hodnota $y_0$ lokálním minimem funkce v bodě $x_0$...
- Taylorův polynom 1. nebo 2. stupně

$$T_1(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

- přibližné hodnoty funkce v bodech $x_0 \pm \varepsilon$

# Tečna a normála

Nechť $y = g(x)$ je funkce určená implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě $A = [x_0, y_0]$.

**Tečna** ke grafu funkce $y = g(x)$ v bodě dotyku $A$ je určena rovnicí

$$t : \frac{\partial F(A)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(A)}{\partial y}(y - y_0) = 0$$

**Normála** je určena rovnicí:

$$n : \frac{\partial F(A)}{\partial y}(x - x_0) - \frac{\partial F(A)}{\partial x}(y - y_0) = 0$$

# Příklady

Sbírka ÚTM:

`https://mat.nipax.cz/_media/implicitni_funkce.pdf`

příklady: řešené 166-169,
neřešené 176-186

# Funkce dvou proměnných, zadaná implicitně

Pro funkci tří proměnných je rovnicí $F(x, y, z) = 0$ popsána plocha. Pokud v okolí bodu $A = [x_0, y_0, z_0] \in \mathcal{D}(F) \subseteq \mathbb{R}^3$ platí:

1. $F(A) = 0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \ \dfrac{\partial F}{\partial y}, \ \dfrac{\partial F}{\partial z}$, opět značíme $F_x, \ F_y, \ F_z$ jsou spojité a
3. $\dfrac{\partial F(A)}{\partial z} \neq 0$, tj. $F_z(A) \neq 0$

potom existuje okolí bodu $A$, ve kterém je rovnicí $F(x, y, z) = 0$ (**implicitně)** určena jediná funkce **dvou** proměnných $z = g(x, y)$, která má spojité parciální derivace.

Pro derivace $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ a $\frac{\partial g}{\partial y}$ v bodě $[x_0, y_0]$ platí

$$\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} = -\frac{F_x(A)}{F_z(A)} \quad \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{F_y(A)}{F_z(A)}$$

# Připomenutí

Známe-li parciální derivace 1.řádu funkce dvou proměnných $g(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0]$, můžeme určit:

- rovnici tečné roviny ke grafu funkce v bodě dotyku $[x_0, y_0, z_0]$

$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

  jejíž normálový vektor $\vec{n} = \left( \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}, -1 \right)$

- parametrické vyjádření normály

$$p : X = [x_0,\ y_0,\ z_0] + t\vec{n}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Taylorův polynom 1. stupně

$$T_1(x,y) = g(x_0,y_0) + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

- diferenciál funkce v bodě $[x_0, y_0]$

$$\mathrm{d}g(x_0,y_0) = \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g(x_0), y_0}{\partial y}\mathrm{d}y$$

- gradient

$$\text{grad } g(x_0,y_0) = \left( \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} \right)$$

- derivaci funkce $g(x,y)$ v bodě $[x_0,\ y_0]$ ve směru $\vec{s}$

$$\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial \vec{s}} = \text{grad } g(x_0,y_0)\frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|}$$

# Příklady

Sbírka ÚTM:

`https://mat.nipax.cz/_media/implicitni_funkce.pdf`

příklady: řešené 170-175,
neřešené 187-196

# Tečná rovina implicitně zadané funkce

**Tečná rovina** ke grafu funkce $z = g(x, y)$, zadané rovnicí $F(x, y, z) = 0$ v bodě dotyku $A$ je určena rovnicí

$$\tau : \frac{\partial F(A)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(A)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(A)}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

**Příklady**

- Napište rovnici tečné roviny$\tau$ a normály $n$ k ploše $xyz^2 - x - y - z = 0$ v bodě $A = [1, -1, -1]$
- Napište rovnici takové tečné roviny$\tau$ k ploše $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho : x + 2y + z = 0$