Lokální extrémy funkce dvou (a tří) proměnných

11. března 2019

Lokální extrémy

Definice

Funkce $y = f(X)$ má v bodě $A \in D(f)$ **lokální minimum**, jestliže existuje takové (prstencové) okolí $\mathcal{O}(A) \subseteq D(f)$ bodu A, že pro **každý** bod $X \in \mathcal{O}(A)$ platí nerovnost $f(X) \geq f(A)$.

Funkce $y = f(X)$ má v bodě $A \in D(f)$ **lokální maximum**, jestliže existuje takové (prstencové) okolí $\mathcal{O}(A) \subseteq D(f)$ bodu A, že pro **každý** bod $X \in \mathcal{O}(A)$ platí nerovnost $f(X) \leq f(A)$.

Nutná podmínka existence lokálního extrému

Nechť funkce $y = f(X)$, která je definovaná na určitém okolí $\mathcal{O}(A)$ bodu A má v tomto bodě lokální extrém.
Existuje-li parciální derivace $\dfrac{\partial f(A)}{\partial x_i}$,
potom se tato parciální derivace v bodě A rovná nule.

Definice Bod $A \in D(f)$ je stacionárním bodem funkce $f(X)$, jestliže

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial f(A)}{\partial x_2} = 0, \ldots \frac{\partial f(A)}{\partial x_n} = 0$$

Poznámky

- Funkce může mít extrém v bodě, ve kterém neexistuje některá parciální derivace.
- Podmínka pro stacionární bod je ekvivalentní podmínce

$$df(A) = 0 \quad \text{nebo} \quad \text{grad} f(A) = \vec{0}$$

- Pokud $df(A) \neq 0$, funkce nemá lokální extrém v bodě A.

Postačující podmínky existence lokálního extrému

Nechť funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ je spojitá se svými parciálními derivacemi prvního a druhého řádu v okolí bodu P a nechť

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f(P)}{\partial y} = 0.$$

Označíme

$$\Delta_2(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Potom platí:

1. Při $\Delta_2(P) > 0$ **má** funkce $f(x, y)$ v bodě P **lokální extrém**.
   1. Pokud $\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} > 0$ má funkce v bodě P **lokální minimum**;
   2. pokud $\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} < 0$ má funkce v bodě P **lokální maximum**.
2. Při $\Delta_2(P) < 0$ **nemá** funkce $f(x, y)$ v bodě P lokální extrém.
3. Je-li $\Delta_2(P) = 0$, **nelze pomocí této podmínky rozhodnout**.

Příklad: "nelze rozhodnout"

$$\textbf{a)} \quad z = x^4 + y^4 \qquad \textbf{b)}\ z = x^3 + y^3$$

V obou případech mají funkce jediný bod, ve kterém jsou derivace 1. řádu rovny nule, bod $P = [0, 0]$.
Druhé derivace jsou v tomto bodě také rovny nule a $\Delta_2(P) = 0$.
a)

$$\forall X \in \mathcal{O}(P) : \; f(X) \geq f(P),$$

protože $f(P) = 0$ a $f(X) \geq 0$. Z definice lokálního minima plyne, že funkce f má v bodě $P = [0, 0]$ lokální minimum rovné nule.
b)
Funkce $z = x^3 + y^3$ má v bodě P nulovou hodnotu, ale v okolí tohoto bodu nabývá jak kladných, tak záporných hodnot.
Proto v tomto bodě nemá lokální extrém.

Postup

1. Určíme parciální derivace 1. řádu.
2. Určíme bod(y) z definičního oboru funkce, ve kterých jsou tyto derivace nulové (nebo neexistují).
3. Určíme derivace duhého řádu a Hessovu matici.
4. Pro každý "podezřelý" bod vypočteme determinant Δ_2 a dále je-li ve zkoumaném bodě
   - $\Delta_2 < 0$, funkce nemá v tomto bodě extrém.
   - $\Delta_2 > 0$, určíme

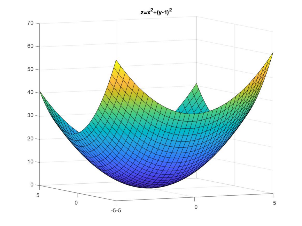
     typ extrému z $\Delta_1 = \dfrac{\partial^2(P)}{\partial x^2}$

     - $\Delta_1 > 0$ v bodě P je lokální minimum
     - $\Delta_1 < 0$ v bodě P je lokální maximum

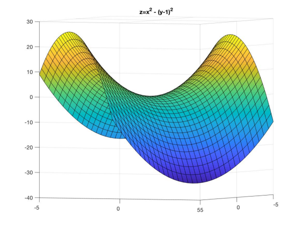
     hledanou hodnotu extrému $f(P)$.
   - $\Delta_2 = 0$, nevíme... rozhodneme z definice.

Příklady

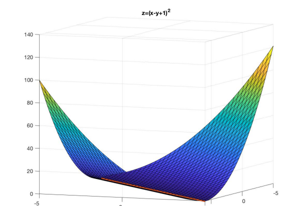
- $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$
  plocha: eliptický paraboloid



- $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$
  hyperbolický paraboloid



- $f(x,y) = (x - y + 1)^2$
  parabolická válcová plocha



Příklady

`https://mat.nipax.cz/_media/extremy_funkci.pdf`

příklady 209-222

Příklad: $z = x^3 + y^3 - 3xy$

1. Parciální derivace 1. řádu:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$
2. Bod(y), ve kterých jsou tyto derivace nulové:
$$3x^2 - 3y \wedge 3y^2 - 3x \Rightarrow y = x^2,\ y^2 = x^4 \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow$$
$x_1 = 0, x_2 = 1$ a hledané body jsou $P_1 = [0,0],\ P_2 = [1,1]$
3. Určíme derivace duhého řádu:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$
4. $$\Delta_2(P_1) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 \quad \Delta_2(P_2) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27$$
5. **Závěr.** V bodě P_1 je $\Delta_2(P_1) < 0$, proto funkce z nemá lokální extrém v bodě P_1. V bodě P_2 je $\Delta_2(P_2) > 0$, proto funkce z má v tomto bodě lokální extrém; typ extrému: $\frac{\partial^2 z(P_2)}{\partial x^2} > 0$, tedy v tomto bodě je lokální minimum $f(P_2) = -1$.

Extrémy funkce dvou proměnných, zadané implicitně

https://mat.nipax.cz/_media/extremy_funkci.pdf

příklady 223-224

Postačující podmínky existence lokálního extrému

Nechť funkce tří proměnných $u = f(x, y, z)$ je spojitá se svými parciálními derivacemi prvního a druhého řádu v okolí bodu P a nechť

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f(P)}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial f(P)}{\partial z} = 0.$$

Označíme

$$\Delta_3(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial z^2} \end{vmatrix}, \Delta_2(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y^2} \end{vmatrix}, \Delta_1(P) = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2}$$

Potom platí:

1. Při $\Delta_2(P) > 0$ **má** funkce $f(x, y, z)$ v bodě P **lokální extrém**, pokud
    1. $\Delta_1(P) > 0, \Delta_3(P) > 0$ je $f(P)$ **lokální minimum**;
    2. $\Delta_1(P) < 0, \Delta_3(P) < 0$ je $f(P)$ **lokální maximum**.
2. Při $\Delta_2(P) < 0$ **nemá** funkce $f(x, y)$ v bodě P lokální extrém.

Příklady

https://mat.nipax.cz/_media/extremy_funkci.pdf

příklady 225-227

Příklad

$$f(x,y,z) = 2xy^2 - 4xy + x^2 + z^2 - 2z$$

- Derivace prvního řádu a podezřelé body

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 - 4y + 2x$	$2y^2 - 4y + 2x = 0$	$P_1 = [0,\ 0,\ 1]$
$\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy - 4x$	$4x(y-1) = 0$	$P_2 = [0,\ 2,\ 1]$
$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2$	$2(z-1) = 0$	$P_3 = [1,\ 1,\ 1]$

- Derivace druhého řádu

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 4y-4 & 0 \\ 4y-4 & 4x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = 8x - (4y-4)^2$$

- Δ_2 v podezřelých bodech

$\Delta_2(P_1) = -16$	$\Delta_2(P_2) = -16$	$\Delta_2(P_3) = 8$
není extrém,	není extrém,	$\Delta_1(P_3) = 2, \Delta_3(P_3) = 32$
		lok. min. $f(1,1,1) = -2$

Příklad

$$f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z), \qquad \begin{array}{c} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \pi \\ 0 \le z \le \pi \end{array}$$

- Derivace prvního řádu a podezřelé body

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \cos(x+y+z) \qquad P_1 = [0,\ 0,\ 0]$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos y - \cos(x+y+z) \qquad P_2 = \left[\tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \cos z - \cos(x+y+z) \qquad P_3 = [\pi,\ \pi,\ \pi]$$

- Derivace druhého řádu (označme $S = \sin(x+y+z)$)

$$H = \begin{pmatrix} -\sin x + S & S & S \\ S & -\sin y + S & S \\ S & S & -\sin z + S \end{pmatrix}$$

- Δ_2 v podezřelých bodech

$$\Delta_2(0,0,0) = 0 \qquad \Delta_2\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = 3 \qquad \Delta_2(\pi,\pi,\pi) = 0$$

$$f(0,0,0) = 0 \qquad \Delta_1(P_2) = -2, \Delta_3(P_2) = -4 \qquad f(\pi,\pi,\pi) = 0$$

minimum maximum $f(P_2) = 3$ minimum