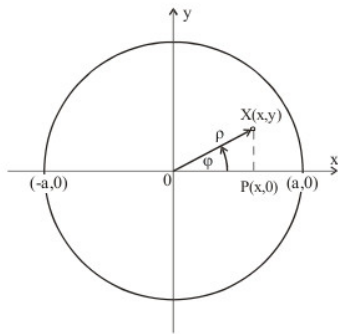


Dvojný integrál v POLÁRNÍCH souřadnicích

25. března 2019

Polární souřadnice v \mathbb{E}_2

Dvojměrné integrály, jejichž integrační oblastí je **kruh**,
případně část kruhu, lze jednoduše vyřešit transformací do
polárních souřadnic.



V trojúhelníku OPX platí:
$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho}.$$

Kartézské souřadnice x , y
bodu nahradíme polárními
souřadnicemi ρ , φ , v nichž

- ρ znamená **vzdálenost**
bodu o souřadnicích
 (x, y) od počátku
soustavy souřadnic
($\rho \geq 0$)
- φ označuje orientovaný
úhel, měřený od kladné
části osy x po průvodič
bodu (x, y) v kladném
smyslu.

Transformační rovnice

Transformační rovnice při přechodu z kartézských souřadnic do polárních souřadnic mají tvar

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

Součin diferenciálů $dx dy$ v dvojrozměrném integrálu nahradíme výrazem $|J| d\rho d\varphi$,

v němž se výraz

$$J = J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \rho$$

nazývá **jakobián** transformace.

Pro dvojrozměrný integrál pak platí

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \underbrace{\rho}_{J} d\varphi d\rho$$

Oblast Ω je obrazem oblasti D v polárních souřadnicích.

Určení mezí: $\iint_D f(x, y) \, dx dy$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}, \quad dx dy = r \, dr d\varphi$$

① D je kruh $x^2 + y^2 \leq a^2$ $0 \leq r \leq a$ $0 \leq \varphi < 2\pi$

② D je ohraničena: $x^2 + y^2 = 2ax$, doplníme na čtverec:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow (x - a)^2 + y^2 = a^2$$

Kružnice je celá v 1. a 4. kvadrantu $\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$,

např. dosazením: $0 \leq r \leq 2a \cos \varphi$

③ D je ohraničena $x^2 + y^2 = 2ay$, doplníme na čtverec:

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + (y - a)^2 = a^2$$

Kružnice je celá v 1. a 2. kvadrantu $\Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi$,

např. dosazením: $0 \leq r \leq 2a \sin \varphi$

④ D je mezikružší $b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$ $b \leq r \leq a$ $0 \leq \varphi < 2\pi$

Zobecněné polární souřadnice v \mathbb{E}_2

Používáme v případě, když oblast integrace

- je elipsa nebo její část
- nemá počátek v $[0, 0]$

D je ohraničena

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$$

Transformační rovnice:

$$x = ar \cos \varphi$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$x = x_0 + r \cos \varphi \quad 0 \leq r \leq a$$

$$y = br \sin \varphi$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$y = y_0 + r \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$J = abr$$

$$J = r$$

$$dx dy = abr \, dr d\varphi$$

$$dx dy = r \, dr d\varphi$$

Příklad

$$\iint_D \sqrt{4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} \, dx dy, \quad D \text{ je ohraničena}$$

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \quad \text{tj.}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$x = 3r \cos \varphi$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$y = 2r \sin \varphi$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$J = 6r$$

$$dx dy = 6r \, dr d\varphi$$

Příklady

① $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy, \quad D : x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$

② $\iint_D x \, dx dy, \quad D : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq x, x \geq 0$

③ $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy, \quad D : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$

Geometrické aplikace dvojného integrálu

1 Plocha oblasti D : $\iint_D dx dy$

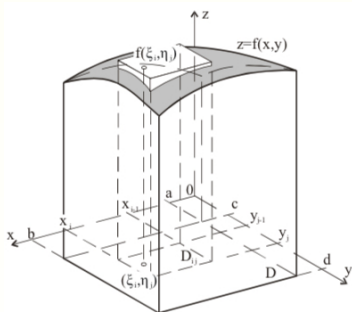
2 Je-li $f(x, y) > 0$:

Objem tělesa s podstavou D
ohraničeného plochou $z = f(x, y)$

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

je-li D obdélník, jedná se o objem
hranolu s obdélníkovou podstavou D ,
který je shora ohraničen plochou
 $z = f(x, y)$,

je-li D kruh/elipsa – objem **válcovitého**
tělesa nad oblastí D , které je shora
ohraničeno plochou $z = f(x, y)$



Fyzikální aplikace (mechanické charakteristiky desky D)

- 1 **hmotnost** desky D , jejíž hustota není konstantní, $\rho(x, y) = f(x, y)$

$$m = \iint_D \underbrace{f(x, y)}_{\rho(x, y)} dx dy$$

- 2 **statický moment** D vzhledem k ose x , resp. y je určen vztahem

$$m_x = \iint_D \underbrace{y \cdot \rho(x, y)}_{f(x, y)} dx dy \quad m_y = \iint_D \underbrace{x \cdot \rho(x, y)}_{f(x, y)} dx dy$$

- 3 souřadnice **těžiště** $T = [T_x, T_y]$ D jsou určeny:

$$T_x = \frac{m_y}{m} \quad T_y = \frac{m_x}{m}$$

- 4 **moment setrvačnosti** D při rotaci kolem osy x , (resp. y , z) je

$$J_x = \iint_D \underbrace{y^2 \cdot \rho(x, y)}_{f(x, y)} dx dy \quad J_y = \iint_D \underbrace{x^2 \cdot \rho(x, y)}_{f(x, y)} dx dy$$

$$J_z = J_x + J_y = \iint_D \underbrace{(x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y)}_{f(x, y)} dx dy$$

Příklady

https://mat.nipax.cz/_media/dvojny19.pdf

283 – 292