Dvojný integrál

21. března 2019

Dvojný integrál v KARTÉZSKÝCH souřadnicích

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Integrál počítáme převedením na dvojnásobný – dvojnásobnou integrací funkce jedné proměnné.

Oblast D je **OBDÉLNÍK** (strany rovnoběžné s osami)

$$\begin{array}{c} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{array}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

POUZE v tomto případě nezáleží na pořadí výpočtu.

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Příklady

1. $\iint_D (x+3)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad D = \{[x,y] : x \in \langle 0,\ 1\rangle,\ y \in \langle 0,\ 2\rangle\}$
2. $\iint_D xye^{xy^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad D = \{[x,y] : x \in \langle 0,\ \ln 2\rangle,\ y \in \langle 0,\ 1\rangle\}$

Příklady

1. $$\iint_D \frac{y}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$ $$D = \{[x,y] : x \in \langle 0,\ 1\rangle,\ y \in \langle 0,\ 1\rangle\}$$

2. $$\iint_D x^2 y e^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad D = \{[x,y] : x \in \langle 0,\ 1\rangle,\ y \in \langle 0,\ 2\rangle\}$$

3. $$\iint_D x^2 y \cos(xy^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D = \{[x,y] : x \in \langle 0,\ \frac{\pi}{2}\rangle,\ y \in \langle 0,\ 2\rangle\}$$

Oblast D je OBDÉLNÍK a $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

POUZE v tomto případě **lze** počítat:

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b f_1(x)\ \mathrm{d}x\ \cdot\ \int_c^d\ f_2(y)\ \mathrm{d}y$$

Příklady

1. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 (x+3)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2\ \mathrm{d}y\ \cdot\ \int_0^1 (x+3)\ \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\iint_D\ e^{2x+3y}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad D = \{[x,y] : x \in \langle 0,\ 1\rangle,\ y \in \langle 0,\ 2\rangle\}$
3. $\displaystyle\iint_D\ x^2 y\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad D = \{[x,y] : x \in \langle 0,\ 2\rangle,\ y \in \langle 1,\ 2\rangle\}$

Obecná rovinná oblast. Elementární obor integrace v $\mathbb{E}_2$

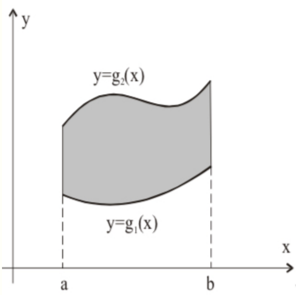
(skripta, str.56)

Nechť funkce $y = g_1(x)$ a $y = g_2(x)$ jsou spojité na intervalu $\langle a,\ b\rangle$ a $g_1(x) \leq g_2(x)$ pro všechna $x \in \langle a,\ b\rangle$. Pak množinu

$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 :$
$a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

nazýváme

elementárním oborem integrace vzhledem k ose x.

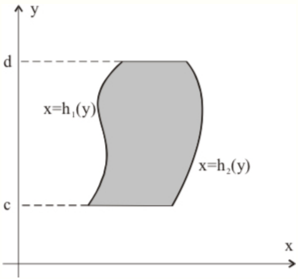


Nechť funkce $x = h_1(y)$ a $x = h_2(y)$ jsou spojité na intervalu $\langle c,\ d\rangle$ a $h_1(y) \leq h_2(y)$ pro všechna $y \in \langle c,\ d\rangle$. Pak množinu

$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 :$
$c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

nazýváme

elementárním oborem integrace vzhledem k ose y.



Fubiniho věta: skripta, str. 57

Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k ose x. (EOI$_x$)
Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v M. Potom platí:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k ose y. (EOI$_y$)
Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v M. Potom platí:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Oblast D je nutné zapsat jako EOI vzhledem k ose x nebo k ose y. Teprve potom lze dvojný integrál převést na dvojnásobný.

Vnější meze **musí být konstantní!**

Nejdříve určíme vnitřní integrál, potom vnější.

Příklady

Určit meze integrace $\iint_D f(x,y)\,dxdy$

1. D je trojúhelník ABC : $A=[0,\ 0],\ B=[a,\ 0],\ C=[0,\ a]$
2. D je trojúhelník ohraničený: $y=1,\ y=x+4,\ y=6-x$
3. D je čtyřúhelník
   $A=[0,\ 0],\ B=[1,\ 2],\ C=[3,\ 1],\ D=[2,\ -2]$
4. D je ohraničena křivkami: $y=x^2,\ y^2=x$

Záměna pořadí integrace.

Přechod od zápisu dvojnásobného integrálu ve tvaru

$$\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \quad \text{do tvaru} \quad \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Příklady

1. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^2 \int_1^{e^y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Příklady

https://mat.nipax.cz/_media/dvojny_integral.pdf

261 – 276