Funkce více proměnných
Limita a spojitost, parciální derivace 1. řádu

diferenciál, tečná rovina a normála
gradient, derivace ve směru

Cvičení 3 a 4

Pojmy (z přednášky)

Body $A, X, Y \in \mathbb{E}_n$

- **Vzdálenost** bodů $X = [x_1, \dots, x_n]$ a $Y = [y_1, \dots, y_n]$

$$\|X - Y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

- Okolí bodu $\mathcal{U}(A)$, R-okolí (δ-okolí bodu) $\mathcal{U}_R(A)$ ($\mathcal{U}_\delta(A)$), prstencové okolí bodu $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}_R(A)$,$\mathcal{P}_\delta(A)$.
- Vniřní bod množiny, hraniční bod množiny.
- Hromadný bod množiny, izolovaný bod množiny.
- **Limita posloupnosti** $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathbb{E}_n$

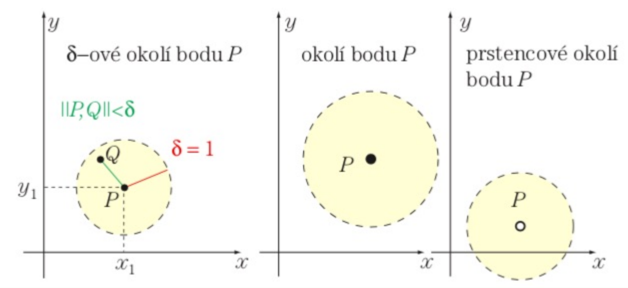
$$\lim_{k\to\infty} \underbrace{\|X_k - A\|}_{\text{posloupnost vzdáleností}} = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} X_k = A$$

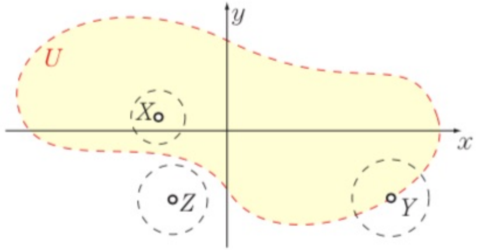
- Limitu posloupnosti bodů $\{X_k\}$ lze počítat "po souřadnicích".

$$\{X_k\} = \left[\frac{\sin k}{k}, \frac{3k^2 + 2k}{1 - 4k^2}, \frac{k+2}{k^2}\right] : \qquad \lim_{k\to\infty} X_k = \left[0, -\frac{3}{4}, 0\right]$$

Okolí bodu a hromadný bod

Okolí bodu:





Hromadný bod

Limita a spojitost

Limita funkce $f(X)$ v bodě $X_0 \in \mathbb{E}_n$ je $a \in \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall X \in \mathcal{P}_\delta(X_0) : |f(X) - a| < \varepsilon$

Jiná definice (skripta): $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = a$ (vzhledem k množině M)

jestliže pro každou posloupnost bodů $\{X_k\}$ v prstencovém okolí $\mathcal{P}(X_0) \subset \mathcal{D}(f)$ (resp. $P(X_0) \cap M \in \mathcal{D}(f)$) platí:

$$\lim_{k \to \infty} X_k = X_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to \infty} f(X_k) = a$$

Věta Funkce může mít v bodě X_0 nejvýše jednu limitu.

Věta O "aritmetice" limit.

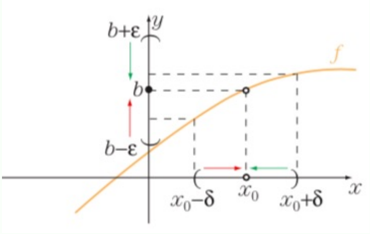
O limitách funkcí n proměnných platí analogické věty jako pro limity funkce jedné proměnné.

Funkce $y = f(X)$ je spojitá v bodě $X_0 \in D(f) \Leftrightarrow$

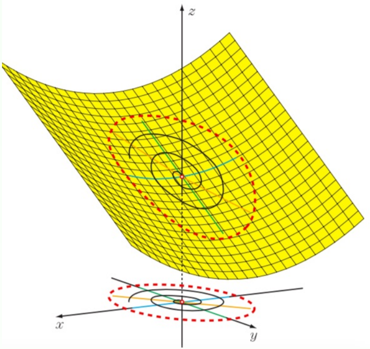
1. **existuje** $\lim\limits_{X \to X_0} f(X)$ **a**
2. $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$

$X \to X_0$

$\mathbb{E}_1$:



$\mathbb{E}_2$:



Limity: příklady

Příklad

$$\lim_{\substack{X \to [0,0] \\ x \neq 0, y \neq 0}} \frac{\sin xy}{xy} \left| \begin{array}{l} \text{označíme } u = xy \\ \text{pro } x \to 0, y \to 0 \\ u \to 0 \end{array} \right| = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Příklad (limita neexistuje)

$$\lim_{\substack{[x,y] \to [0,0] \\ x \neq -y}} \frac{x-y}{x+y} \left| \begin{array}{l} \text{po přímce } y = x \\ \text{pro } x \to 0 \Rightarrow y \to 0 \end{array} \right| = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = x}} \frac{x-x}{x+x} = 0$$

$$\textbf{ALE} \left| \begin{array}{l} \text{ale po} \\ \text{přímce } y = 2x \end{array} \right| \lim_{X \to [0,0]} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x \to 0} \frac{x-2x}{x+2x} = -\frac{1}{3}$$

Často bývá vhodná transformace do polárních souřadnic:

$$x = r\cos t \quad y = r\sin t$$

Dostaneme-li výsledek nezávislý na t, limita existuje.

O neexistenci limity se můžeme přesvědčit například tak,
že najdeme dvě různé hodnoty pro dvě různé "cesty", po kterých se blížíme k bodu X_0.
(např. $y = kx, y = kx^2 \dots$)

Ale dostaneme-li na **dvou** cestách do bodu X_0 stejné limity,
nemůžeme o existenci limity dělat žádný závěr.

Parciální derivace

Definice

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ parciální derivaci (prvého řádu) podle x, jestliže existuje (vlastní) limita $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ parciální derivaci (prvého řádu) podle y, jestliže existuje (vlastní) limita $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Poznámka

Při výpočtu parciální derivace funkce n proměnných postupujeme tak, že $n - 1$ proměnných považujeme za konstanty a derivujeme obvyklým způsobem (**podle stejných pravidel**) funkce jedné proměnné.

Značení

$$\underbrace{\frac{\partial f(A)}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_A}_{\text{derivace v bodě}} \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

Příklady

1. $f(x,y) = x^4y^5 + 5x^3 + 6y^2, A = [1,1]$
2. $f(x,y) = x^2 \ln y + y \sin x \cos^2 x$
3. $f(x,y) = (2x - 5y)^4$
4. $f(x,y) = 5x^4y^2 + \dfrac{x}{y} + 2x^2 3y$
5. $f(x,y) = y^{x^2+3}, y > 0$
   $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^{x^2+3} \cdot \ln(y) \cdot 2x$
6. $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

Geometrický význam derivace

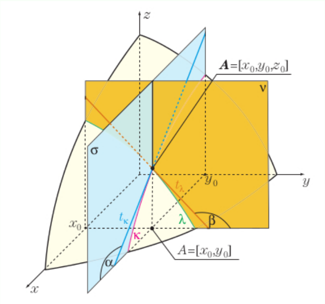
Funkce jedné proměnné.

Derivace funkce jedné proměnné v daném bodě (x_0) je směrnice tečny ke grafu funkce jedné proměnné v tomto bodě $([x_0, f(x_0)])$.

Funkce dvou proměnných.

$\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ je směrnice tečny v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ **řezu plochy** $z = f(x, y)$ **rovinou** $y = y_0$ rovnoběžnou s rovinou (xz).

$\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ je směrnice tečny v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ **řezu plochy** $z = f(x, y)$ **rovinou** $x = x_0$ rovnoběžnou s rovinou (yz).



Rozlišujeme bod z definičního oboru a bod na grafu funkce.

Diferencovatelnost funkce

Funkce $z = f(x, y)$ je **v bodě** $A = [x_0, y_0] \in \mathcal{D}(f)$ **diferencovatelná**, jestliže k ploše $z = f(x, y)$ v bodě plochy $[x_0, y_0, f(x_0)]$ **existuje tečná rovina** popsaná

$$z = L(x, y), \quad L(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

která není rovnoběžná s osou y,

pro kterou platí

$$\lim_{X \to A} \frac{f(x, y) - L(x, y)}{\|X - A\|}$$

(limita zaručuje jednoznačnost koeficientů a, b a jednoznačnost roviny)

Funkce $z = f(x, y)$ je **v bodě** $A = [x_0, y_0] \in \mathcal{D}(f)$ **diferencovatelná**, existuje-li lineární funkce $L(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$ taková, že $\lim_{X \to A} \frac{f(x, y) - L(x, y)}{\|X - A\|}$

Diferencovatelnost a spojitost

Věta Je-li funkce v bodě A diferencovatelná, má v bodě A parciální derivace 1.řádu a platí $a = \dfrac{\partial f(A)}{\partial x}$, $b = \dfrac{\partial f(A)}{\partial y}$

Věta Jsou-li **parciální derivace** 1.řádu **spojité** v bodě A, je **funkce** v bodě A **diferencovatelná**.

Věta Je-li funkce v bodě A diferencovatelná, je v tomto bodě spojitá.

Funkce je **diferencovatelná** v množině $M \subset \mathbb{E}_2$, je-li diferencovatelná v každém bodě množiny M.

Funkce je **diferencovatelná**, je-li diferencovatelná v každém bodě definičního oboru.

Tečná rovina a normála, diferenciál

Nechť funkce $z = f(x, y)$ je diferencovatelná v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{E}_2$.
Tečnou rovinou ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě dotyku (bod na grafu funkce) $P = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$ nazýváme množinu bodů v $\mathbb{E}_3$:

$$\tau : z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Normálový vektor tečné roviny: $\vec{n} = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x},\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y},\ -1 \right)$.

Normála grafu funkce f v bodě P je přímka, která je kolmá k tečné rovině a prochází bodem P, tj. směrovým vektorem normály je vektor $\vec{n}$.
Parametrické rovnice normály jsou:

$$X = P + \vec{n} \cdot t, \quad \text{tj.} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Diferenciál funkce f v bodě A

$$\mathrm{d}f(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(A)}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Použití a geometrický význam diferenciálu

Diferenciál lze použít například k **přibližnému výpočtu hodnot funkce**:

$$f(x,y) \doteq f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0)$$

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Geometrický význam: Totální diferenciál funkce dvou proměnných je **přírůstek měřený na tečné rovině**.

Příklady – použití diferenciálu

Příklad 1. O kolik se (přibližně) změní plocha a úhlopříčka obdélníka o stranách délek $x = 6m$, $y = 8m$, jestliže se strana x zvětší o $2mm$ a strana y zmenší o $5mm$?

Plocha $p(x, y) = xy$, $\qquad p(6, 8) = 48$, $\qquad \Delta p \doteq dp$

$$p(6 + \Delta x, 8 + \Delta y) = p(6 + 2 \cdot 10^{-3},\ 8 - 5 \cdot 10^{-3}) \doteq p(6, 8) + dp(6, 8)$$

$$dp(6, 8) = \underbrace{8}_{\frac{\partial p(6,8)}{\partial x}} \underbrace{(6 + 2 \cdot 10^{-3} - 6)}_{dx} + \underbrace{6}_{\frac{\partial p(6,8)}{\partial y}} \underbrace{(8 - 5 \cdot 10^{-3} - 8)}_{dy} = -140[cm^2]$$

Úhlopříčka $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\qquad u(6, 8) = \sqrt{36 + 48} = 10$, $\qquad \Delta u \doteq du$

$$du(6, 8) = \frac{6}{10}(2 \cdot 10^{-3}) - \frac{8}{10}(5 \cdot 10^{-3}) = 28 \cdot 10^{-4}[m]$$

Příklad 2. Měřením poloměru podstavy r a výšky h válce se získaly následující výsledky: $r = 2,5m \pm 0,1m$, $\quad h = 4,0m \pm 0,2m$.
S jakou absolutní chybou a jakou relativní chybou lze vypočítat objem válce?

Příklad 3. Strany trojúhelníka mají rozměry
$a = 200m \pm 2m, B = 300m \pm 5m$ a úhel mezi nimi je roven $\gamma = 60^\circ \pm 1^\circ$.
S jakou absolutní chybou lze spočítat délku 3. strany?

Taylorův polynom

Se středem v bodě A,

- funkce jedné proměnné : $A = x_0$ *(připomenutí)*

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$$

- funkce dvou proměnných: $A = [x_0, y_0]$

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Diferencovatelnost, diferenciál, tečná rovina - příklad

$$f(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2, \quad A = [-1, 1]$$

1. definiční obor $D(f) = \mathbb{R}^2$, $f(x, y)$ je spojitá v $\mathbb{R}^2$.
2. derivace 1. řádu: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2x - 6y$, parciální derivace jsou spojité v $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ funkce f je diferencovatelná v $\mathbb{R}^2$
3. derivace 1. řádu v bodě A: $\dfrac{\partial f(A)}{\partial x} = -4$, $\dfrac{\partial f(A)}{\partial y} = -4$
4. diferenciál: $df = (2x - 2y)dx + (-2x - 6y)dy$
   v bodě A: $df(A) = -4dx - 4dy$
5. rovnice tečné roviny v bodě $[-1, 1, f(-1, 1)] = [-1, 1, 0]$:
   $\tau : z = -4(x + 1) - 4(y - 1)$
6. Taylorův polynom 1. stupně se středem v bodě A:
   $T_1(x, y) = -4(x + 1) - 4(x - 1)$
7. přibližná hodnota funkce v bodě $[-1.1, 1.2]$:
   $f(-1.1,\ 1.2) \doteq T_1(-1.1,\ 1.2) = -4(-0.1) - 4(0.2) = -0.4$

Příklady

1. Najděte rovnici tečné roviny τ a normály n grafu funkce $f(x, y) = 2x^2 - 4y^2$ v bodě $T = [2, 1, ?]$.
   Vypočítejte přibližně hodnotu funkce f v bodě $[2.2, 1.3]$.

2. Najděte rovnici tečné roviny τ a normály n grafu funkce $f(x, y) = \frac{1}{x}\arcsin y$ v bodě $T = [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, ?]$.

3. Najděte rovnici tečné roviny τ plochy $z = x^2 + xy - y^2 + x + 3$ rovnoběžné s danou rovinou $\rho: \; 5x - 3y - z = 0$.

Gradient, derivace ve směru

Gradient funkce $y = f(x_1, \ldots, x_n)$

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Gradient funkce v bodě určuje **směr největšího růstu** (největší spád) funkce v tomto bodě. Pro diferencovatelnou funkci je

derivace funkce (skalárního pole) f v bodě A ve směru $\vec{s}$

$$\frac{df(A)}{d\vec{s}} = \boxed{\frac{\text{grad } f(A) \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|}} = \frac{\frac{\partial f(A)}{\partial x_1} \cdot s_1 + \frac{\partial f(A)}{\partial x_2} \cdot s_2 + \cdots + \frac{\partial f(A)}{\partial x_n} \cdot s_n}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \ldots s_n^2}}$$

Derivace skalárního pole $f(x, y, z)$ v bodě A ve směru $\vec{s}$ určuje přírůstek skalárního pole $f(x, y, z)$ v bodě A ve směru vektoru $\vec{s}$ neboli **rychlost růstu** skalárního pole $f(x, y, z)$ v bodě A ve směru vektoru $\vec{s}$.

Vlastnosti gradientu

- Gradient skalárního pole $f(x, y, z)$ je v každém bodě kolmý k hladině tímto bodem procházející.
- Ve směru gradientu roste skalární pole $f(x, y, z)$ nejrychleji, ve směru opačném nejrychleji klesá.
- Maximální rychlost růstu skalárního pole $f(x, y, z)$ má velikost $v = |\text{grad } f|$.

Příklady

1. Určete úhel mezi gradienty daných funkcí v bodě A
$f(x, y, z) = xy + yz$,
$g(x, y, z) = \sin(xz) + x + y - zy - 1, \ A = [1, 1, 0]$

2. Určete, ve kterých bodech z $D(f) = \mathbb{E}_3$ je gradient funkce
$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ roven nulovému vektoru.

Příklad

Vypočítejte derivaci funkce $f(x,y,z) = 3x^2 - 4y^3 + 2z^4$ v bodě $A = [1,2,1]$ ve směru $\vec{s} = (3,4,5)$.

1. parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x, \dfrac{\partial f}{\partial y} = -12y^2, \dfrac{\partial f}{\partial z} = 8z^3$

2. parciální derivace v bodě A
$\dfrac{\partial f(A)}{\partial x} = 6, \dfrac{\partial f(A)}{\partial y} = -48, \dfrac{\partial f(A)}{\partial z} = 8$

3. gradient $\operatorname{grad} f(A) = (6,-48,8)$

4. $\dfrac{df(A)}{d\vec{s}} = \dfrac{(6,-48,8)\cdot(3,4,5)}{\sqrt{9+16+25}} = -\dfrac{134}{\sqrt{50}} = -\dfrac{134}{5\sqrt{2}}$

Shrnutí (derivace 1. řádu)

Známe-li parciální derivace 1.řádu funkce dvou proměnných $g(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$, můžeme určit:

- rovnici tečné roviny ke grafu funkce v bodě dotyku $[x_0, y_0, z_0]$

$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

  jejíž normálový vektor $\vec{n} = \left(\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}, -1 \right)$

- parametrické vyjádření normály

$$p : X = [x_0,\ y_0,\ z_0] + t\vec{n}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Taylorův polynom 1. stupně

$$T_1(x, y) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

- diferenciál funkce v bodě $[x_0, y_0]$

$$\mathrm{d}g(x_0, y_0) = \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g(x_0), y_0}{\partial y}\mathrm{d}y$$

- gradient

$$\text{grad } g(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \right)$$

- derivaci funkce $g(x, y)$ v bodě $[x_0,\ y_0]$ ve směru $\vec{s}$

$$\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial \vec{s}} = \text{grad } g(x_0, y_0) \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|}$$