Úvodní informace
Funkce více proměnných

Cvičení první

18. února 2019

Obsah

Úvodní informace.

Komunikace:

e-mail: `olga@majling.eu` nebo `olga.majlingova@fs.cvut.cz`

Konzultační hodiny:
STŘEDA 14:15-15:45, KN-D 204 (případně po domluvě e-mailem)

Tématické celky

1. Diferenciální počet funkcí více proměnných
2. Integrální počet funkcí více proměnných:
   dvojné a trojné integrály
3. Integrální počet funkcí více proměnných:
   křivkové a plošné integrály

Zdroje informací

Informace k předmětu (harmonogram, vyhláška o zkoušce)

https://mat.nipax.cz/matii

Doporučená literatura

https://mat.nipax.cz/literatura_m2

Příklady:
Diferenciální počet

Definiční obory
https://mat.nipax.cz/_media/definicni_obory.pdf
Parciální derivace
https://mat.nipax.cz/_media/diferencialni_pocet-cast_2.pdf
Extrémy
https://mat.nipax.cz/_media/extremy_funkci.pdf
Funkce, definovaná implicitně
https://mat.nipax.cz/_media/implicitni_funkce.pdf

A další ...

Zápočet

Za výsledky práce v semestru:

- testíky na cvičení (1 příklad, sešit povolen)
- 3 zápočtové testy (sešit povolen)
- domácí úkoly (odevzdané v termínu)

Z každé části je možné získat 33-34 bodů.

Zápočet bude udělen při splnění podmínek:

1. z každé části nejméně 10 bodů
   a zároveň
2. celkem nejméně 45 bodů

Funkce více proměnných

Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$.

Funkcí více proměnných budeme rozumět každé zobrazení

$$f : M \to \mathbb{R}$$

Množinu M nazýváme **definičním oborem** funkce f a značíme D_f resp. $D(f)$.

$\mathbb{R}^n$ je kartézský součin $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \mathbb{R}}_{n \text{ krát}}$.

Zobrazení f přiřazuje každé uspořádané n-tici $X = (x_1, \ldots, x_n)$ reálných čísel z množiny M **jediné** reálné číslo y, proto mluvíme o **reálné funkci n reálných proměnných**. Zapisujeme $y = f(X)$.

Pro $n = 2$ *zpravidla* používáme zápis $z = f(x, y)$, pro $n = 3$: $u = f(x, y, z)$.

Příklady:

fyzika: $u = f(x, y, z)$ popisuje **skalární pole** skalární veličiny.

objem válce: $V = f(r, h)$: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$,

objem kvádru : $V = f(a, b, c)$: $V = a \cdot b \cdot c$

Interval a oblast

- Při zkoumání funkce **jedné proměnné** jsme pracovali s množinou $M \subseteq \mathbb{R}$, nejčastěji s **interval**em.
- Funkce **více (n) proměnných**: množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Bod $P \in M$ je **vnitřním bodem** množiny M, jestliže existuje takové okolí bodu P, které celé patří do M.
- Množinu M, jejíž každý bod je jejím vnitřním bodem, nazveme **otevřenou množinou**.
- Otevřenou množinu M, jejíž každé dva body lze spojit lomenou čarou, která celá leží v M nazveme **souvislou**.
- **Otevřenou souvislou množinu nazveme oblastí**.
- **Uzavřená oblast** je oblast s přidanými hromadnými body, které do ní nepatří (oblast a její hranice).

Definiční obor

Není-li zadán definiční obor, pak se jím rozumí maximální "přípustná" podmnožina v $\mathbb{R}^n$, tj. množina bodů, ve kterých má daná funkce smysl, ve kterých existuje funkční hodnota.

Příklad $z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$

Podmínky pro definiční obor:

1. jmenovatel nesmí být nula: $y \neq 0$
2. pro arcsin v musí platit $-1 \leq v \leq 1$
3. pro $\frac{x}{y^2}$: $-1 \leq \frac{x}{y^2} \leq 1 \Rightarrow -y^2 \leq x \leq y^2$
4. pro $1-y$: $-1 \leq 1-y \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq y \leq 2$

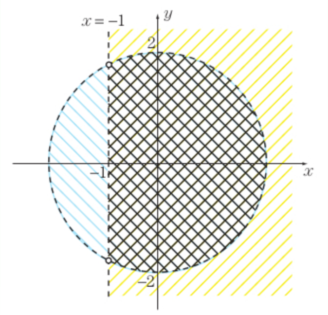
Podmínky 1, 3, 4 musí platit zároveň.
Tedy funkce má smysl v části roviny omezené přímkou $y = 2$, parabolami $y^2 = x$ a $-y^2 = x$ včetně hranice s vyjmutím počátku.
$D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y \in (0, 2\rangle \wedge x \leq y^2 \wedge x \leq -y^2\}$

Definiční obor a jeho náčrt

Příklad $z = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

Podmínky pro definiční obor:

1. jmenovatel nesmí být nula
2. **sudá** odmocnina je definovaná pouze pro **nezáporné** hodnoty
3. logaritmus je definovaný pouze pro **kladné** hodnoty

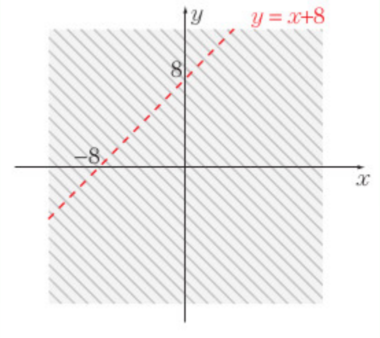


Příklady

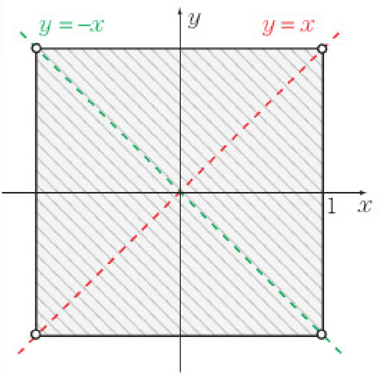
Popište a načrtněte množinu, kde je funkce $z = f(x, y)$ definovaná.

1.

a) $z = \dfrac{x + y - 5}{x - y + 8}$



b) $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2} + \arcsin x + \arccos y$

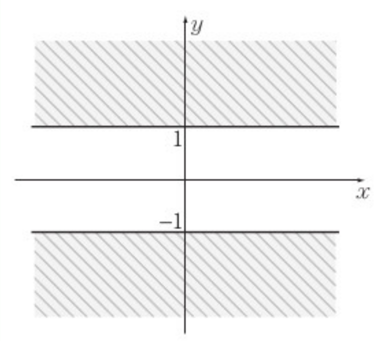


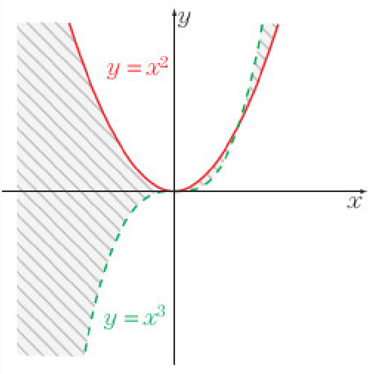
Příklad

2.

a) $z = \sqrt{y^2 - 1}$

b) $z = \sqrt{\dfrac{y - x^2}{x^3 - y}}$





Vrstevnice, vrstevnicový graf funkce 2 proměnných

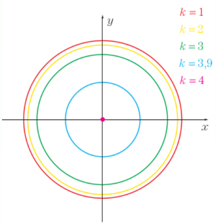
Vrstevnicí plochy $z = f(x, y)$ rozumíme množinu bodů v rovině, kterým funkce $z = f(x, y)$ přiřazuje stejnou funkční hodnotu.
Rovnice vrstevnice: $f(x, y) = C$
Ve fyzice je rovnicí $f(x, y, z) = C$ je určena **skalární hladina** skalárního pole (izobara, izoterma)

Příklad

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

1. Definiční obor: $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$
   Kruh se středem v $[0, 0]$ a poloměrem 4.
2. Vrstevnice: $z = C, C \in \langle 0,\ 4\rangle$, například

$$z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$$
$$z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 15$$
$$\vdots$$
$$z = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$$

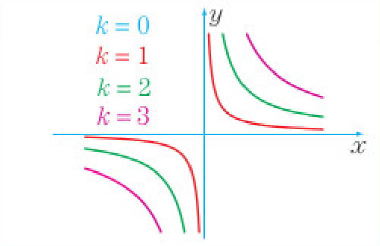


Příklady

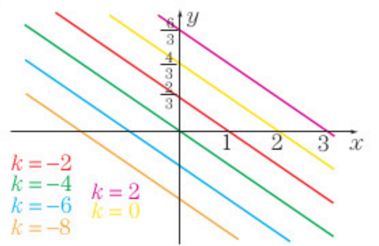
Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce

1.

$$z = \sqrt{xy}$$



$$z = 2x + 3y - 4$$



Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce

$$z = \frac{2x^2}{y^2}$$