Průběh funkce

1. Pro **funkci** určíme:
   1. definiční obor $\mathcal{D}(f)$,
   2. zda je (není) sudá, lichá, periodická
   3. průsečíky s osami souřadnic (pokud existují)
   4. jednostranné limity v krajních bodech $\mathcal{D}(f)$
2. Najdeme **rovnice asymptot**.
   - svislá: $x = x_0$, pokud aspoň jedna jednostranná limita pro $x \to x_0$ je $\pm\infty$
   - šikmá: $y = kx + q$, kde $k = \lim \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim f(x) - kx$
3. Vypočteme a vyšetříme **derivaci** $f'(x)$:

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \rightarrow \quad f(x) \text{ je rostoucí} \\ < 0 & \rightarrow \quad f(x) \text{ je klesající} \\ = 0 & \rightarrow \quad \text{stacionární body} \end{cases}$$

4. Vypočteme a vyšetříme **druhou derivaci** $f''(x)$:

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \rightarrow \quad f(x) \text{ je ryze konvexní} \\ < 0 & \rightarrow \quad f(x) \text{ je ryze konkávní} \\ = 0 & \rightarrow \quad \text{možné inflexní body} \end{cases}$$

5. **Graf**.

Půběh funkce $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

1. Pro **funkci** určíme:

1. definiční obor $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$,
2. zda je sudá: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = f(x) \Rightarrow$**je sudá**.
   Proto vyšetříme průběh pouze na množině $\langle 0, 1) \cup (1, +\infty)$
3. průsečíky s osami souřadnic (pokud existují):
   $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow Y = [0, -1]$; $y \neq 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(f)$
4. jednostranné limity v krajních bodech $\mathcal{D}(f)$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Průběh $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$: Asymptoty

2. Určíme rovnice asymptot.

- svislá: $x = x_0$, pokud aspoň jedna jednostranná limita pro $x \to x_0$ je $\pm\infty$
  $$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to +1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty$$
  Tedy přímky $x = -1$ a $x = 1$ jsou svislými asymptotami.
- šikmá: $y = kx + q$, kde $k = \lim \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim f(x) - kx$
  $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{(x^2-1)x} = 0$$
  $$\lim_{x\to\infty} f(x) - 0\cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$
  Přímka $y = 1$ je šikmá asymptota.

Průběh $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$: 1. a 2. derivace

3. Určíme derivaci:

$$y' = \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{-4x}{(x^2-1)^2} \begin{cases} > 0 & x \in (-\infty, -1) & \rightarrow & f(x) \text{ je rostoucí} \\ & x \in (-1, 0) & \rightarrow & f(x) \text{ je rostoucí} \\ < 0 & x \in (0, 1) & \rightarrow & f(x) \text{ je klesající} \\ & x \in (1, \infty) & \rightarrow & f(x) \text{ je klesající} \\ = 0 & x = 0 & \rightarrow & M = [0, 1] \text{ lokální maximum} \end{cases}$$

4. Určíme druhou derivaci:

$$y'' = \frac{-4(x^2-1)^2 + 4x \cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

$$\frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3} \begin{cases} > 0 & x^2-1 > 0 & x \in (-\infty, -1) & \rightarrow & f(x) \text{ je konvexní} \\ & & x \in (1, \infty) & \rightarrow & f(x) \text{ je konvexní} \\ < 0 & x^2-1 < 0 & x \in (-1, 1) & \rightarrow & f(x) \text{ je konkávní} \\ \neq 0 & & & \rightarrow & \text{nemá inflexní body} \end{cases}$$

Průběh $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$: graf

5. Podle výsledků výpočtů sestrojíme graf.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,\infty)$
f'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	l.max.	$\searrow$	$\searrow$
f''	$+$	$-$		$-$	$+$
f	$\smile$	$\frown$		$\frown$	$\smile$