Připomenutí: Riemanův integrál

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

- uzavřený a omezený interval $\langle a,\ b\rangle$
- funkce $f(x)$ je definovaná a omezená na intervalu $\langle a,\ b\rangle$
  (a má nejvýše konečný počet bodů nespojitosti na tomto intervalu)
- $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$

Pokud

- interval **není omezený**
  nebo
- funkce $f(x)$ **není omezená** na intervalu $\langle a,\ b\rangle$

zkoumáme konvergenci nebo divergenci **nevlastního integrálu**.

Nevlastní integrál na neomezeném intervalu

- $\langle a,\ +\infty)$, $(-\infty,\ b\rangle$, $(-\infty, \infty)$

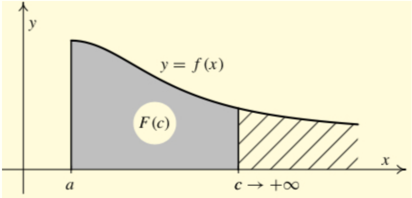
Uvažujme funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $\langle a,\ +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, takovou, že **pro každé** $c > a$ **existuje určitý integrál** $\int_a^c f(x)\mathrm{dx}$.

Pak můžeme definovat funkci F vztahem

$$F(c) = \int_a^c f(x)\ \mathrm{dx},\ c \geq a.$$

Nechť existuje

$$\lim_{c\to\infty} F(c) = \mathrm{I},\ \mathrm{I} \in \mathbb{R}.$$



Pak řekneme, že

nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{dx}$ konverguje a jeho hodnota je I.

Pokud **limita je nevlastní** nebo **limita neexistuje**, říkáme, že **integrál diverguje**.

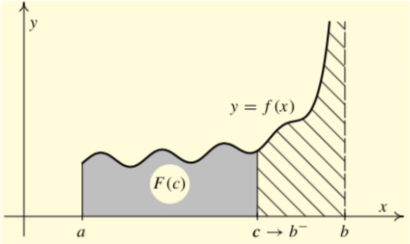
Nevlastní integrál z neomezené funkce

Uvažujme funkci f definovanou na intervalu $\langle a,\ b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, která není na intervalu $\langle a,\ b)$ omezená, takovou, že **pro každé** $c \in (a,\ b)$ **existuje určitý integrál** $\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{dx}$.

(v žádném levém $\delta-$okolí bodu b není funkce omezená)

Pak můžeme definovat funkci F vztahem

$$F(c) = \int_a^c f(x)\ \mathrm{dx},\ a \leq c < b$$



Nechť existuje

$$\lim_{c \to b^-} F(c) = \mathrm{I},\ \mathrm{I} \in \mathbb{R}.$$

Pak řekneme, že

$$\boxed{\text{nevlastní integrál } \int_a^b f(x)\mathrm{dx} \text{ konverguje a jeho hodnota je } \mathrm{I}.}$$

Pokud **limita je nevlastní** nebo **limita neexistuje**, říkáme, že **integrál diverguje**.

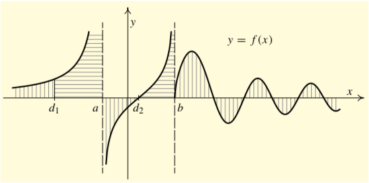
Zobecnění

Interval integrace $J = \langle \alpha, \beta \rangle$, $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$, obsahuje **konečný počet** "špatných bodů", například

- je neomezený na obě strany, tj $(-\infty, \infty)$
- funkce není omezená ani v pravém okolí bodu a, ani v levém okolí bodu b
- singulární bod funkce f je uvnitř intervalu integrace, v žádném (oboustranném) okolí takového bodu není funkce f omezená

Mezi "špatné body" vložíme pomocné body a jimi rozdělíme interval integrace tak, aby všechny singulární body byly pouze krajními body vzniklých intervalů. Integrály vyšetříme na jednotlivých intervalech.
$f(s)$ je funkce, jejíž graf je na obrázku.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{d_1} f(x)\, dx + \int_{d_1}^{a} f(x)\, dx + \int_{a}^{d_2} f(x)\, dx + \int_{d_2}^{b} f(x)\, dx + \int_{b}^{\infty} f(x)\, dx$$



Nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{dx}$ konverguje pokud konvergují všechny dílčí nevlastní integrály.

Pokud **aspoň jeden** dílčí integrál diverguje, říkáme, že **integrál diverguje**.

Příklady

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$
- $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
- $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$
- $\int_0^\infty e^{-3x}\,dx$
- $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$
- $\int_{-\infty}^\infty \frac{2x}{x^2+1}\,dx$
- $\int_2^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$
- $\int_0^{1/e} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$
- $\int_1^2 \frac{1}{x\ln x}\,dx$
- $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$
- $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx$
- $\int_0^1 x\ln x\,dx$
- $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx$
- $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$
- $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$
- $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$

Příklady

- $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(x+1)}\, dx$
- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2-4x+3}\, dx$
- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\, dx$
- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\, dx$