Monotonie, extrémy

Věta. Nechť funkce f je spojitá v intervalu I. Pak platí implikace:

derivace		funkce f je v intervalu I :	derivace		funkce f je v intervalu I :
$f' > 0$	$\Rightarrow$	rostoucí	$f' < 0$	$\Rightarrow$	klesající
$f' \geq 0$	$\Rightarrow$	neklesající	$f' \leq 0$	$\Rightarrow$	nerostoucí

$$f' = 0 \Rightarrow f \text{ je v intervalu } I \text{ konstantní}$$

Lokální extrémy

Funkce má v bodě x_0 **lokální minimum** (**lokální maximum**), existuje-li okolí $P(x_0)$ bodu x_0, že pro všechna $x \in P(x_0)$ platí:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{resp.} \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Věta

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li $f'(x_0)$, je $f'(x_0) = 0$.
To znamená, že funkce může nabývat svých lokálních extrémů na intervalu I v těch vnitřních bodech intervalu I, ve kterých:

- nemá derivaci
- derivace je rovna nule

Příklad: monotonie, lokální extrémy

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln x}, \quad \mathcal{D}(f) = (0,1) \cup (1,\infty)$$

- $f'(x) = \dfrac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}, \quad \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f)$
- Určíme nulové body derivace:
  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = 1$ $(x \neq 0)$, tj. $x = e^{\frac{1}{2}}$
- Každý z intervalů $\mathcal{D}(f')$ rozdělíme nulovými body na disjunktní intervaly: $(0,1)$, $(1,\sqrt{e})$, $(\sqrt{e},\infty)$
- V každém z těchto intervalů zvolíme jeden bod a určíme znaménko derivace ve zvolených bodech.
  ($x > 0$, $\ln^2 x > 0$, proto stačí určit znaménko $2\ln x - 1$)

	$(0,1)$	$(1,\sqrt{e})$	$\sqrt{e}$	$(\sqrt{e},\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

- Závěr: Funkce je rostoucí v intervalu $\langle\sqrt{e},\infty)$, klesající v intervalech $(0,1)$ a $(1,\sqrt{e}\rangle$. Má lokální minimum e v bodě $x_0 = \sqrt{e}$.

Příklad: monotonie, lokální extrémy

$$f(x) = 2x + 9\sqrt[3]{(1-x)^2}, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$$

- $f'(x) = 2 - \dfrac{6}{\sqrt[3]{1-x}}, \quad \mathcal{D}(f') = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
- Derivace není definovaná pro $x = 1$.
- Určíme nulové body derivace:
  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x} = 3$, tj. $x = -26$.
-

	$(-\infty, -26)$	-26	$(-26, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	není	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

- Závěr: Funkce je rostoucí v intervalech $(-\infty, -26\rangle$ a $\langle 1, \infty)$, klesající v intervalu $\langle -26, 1\rangle$. Má lokální minimum 2 v bodě $x_0 = 1$, lokální maximum 29 v bodě $x_1 = -26$.