Konvexní a konkávní funkce

Funkce $f(x)$ je na intervalu $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}(f)$

ryze konvexní | **ryze konkávní**

jestliže $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{D}(f)$, takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí:

$$f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) \qquad f(x_2) > f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$$

(bod$[x_2, f(x_2)]$ leží pod (resp. nad) sečnou $Q_1 = [x_1, f(x_1)] Q_2 = [x_3, f(x_3)]$)

Věta. Nechť funkce f má f'' v intervalu $\mathcal{I} = (a, b)$. Pak platí implikace:

derivace $\forall x \in \mathcal{I}$		funkce f je v intervalu $\mathcal{I}$:	derivace $\forall x \in \mathcal{I}$		funkce f je v intervalu $\mathcal{I}$:
$f'' > 0$	$\Rightarrow$	ryze konvexní	$f'' < 0$	$\Rightarrow$	ryze konkávní
$f'' \geq 0$	$\Rightarrow$	konvexní	$f'' \leq 0$	$\Rightarrow$	konkávní

$f'' = 0 \Rightarrow f$ je v intervalu $\mathcal{I}$ lineární

Inflexní bod. Bod $[x_0, f(x_0)]$ je inflexním bodem funkce f, jestliže

- existuje $f'(x_0) \in \mathbb{R}$
- a funkce f je v nějakém levém okolí bodu x_0 ryze konvexní a nějakém pravém okolí bodu x_0 ryze konkávní (resp. naopak).

(Tj. konvexnost se mění na konkávnost (resp. naopak).)

Příklad: konvexnost, konkávnost

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln x}, \quad \mathcal{D}(f) = (0,1) \cup (1,\infty)$$

- $f'(x) = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$, $f''(x) = \dfrac{2\ln^2 x - 3\ln x + 2}{\ln^3 x}$, $\mathcal{D}(f'') = \mathcal{D}(f)$
- Určíme nulové body 2. derivace: nemá.
- V každém z intervalů $\mathcal{D}(f'')$ zvolíme jeden bod a určíme znaménko 2. derivace ve zvolených bodech.

  (čitatel je kladný, proto stačí určit znaménko $\ln x$)

	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$

- Závěr:

  Funkce je konvexní v intervalu $(1,\infty)$, konkávní v intervalu $(0,1)$.
  Nemá inflexní body.

Příklad: konvexnost, konkávnost, inflexní body

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$$

- $f'(x) = -2xe^{-x^2},\ f''(x) = 2(2x^2-1)e^{-x^2},\ \mathcal{D}(f'') = \mathbb{R}$
- Určíme nulové body 2. derivace:
  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$
- $\mathcal{D}(f'')$ rozdělíme nulovými body na disjunktní intervaly:
  $(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$, $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$
- V každém z těchto intervalů zvolíme jeden bod a určíme znaménko derivace ve zvolených bodech. (stačí určit znaménko $2x^2-1$)
-

	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\smile$	infl.	$\frown$	infl.	$\smile$

- Závěr: Funkce je konvexní v intervalech $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ a $\langle\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$, konkávní v intervalu $\langle-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$. Body $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ jsou inflexní.

Příklad: konvexnost, konkávnost, inflexní body

$$f(x) = x^6, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$$

- $f'(x) = 6x^5,\ f''(x) = 30x^4,\ \mathcal{D}(f'') = \mathbb{R}$
- Určíme nulové body 2. derivace: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\mathcal{D}(f'')$ rozdělíme nulovými body na disjunktní intervaly:
  $(-\infty, 0), \quad (0, \infty)$
- V každém z těchto intervalů zvolíme jeden bod a určíme znaménko derivace ve zvolených bodech.
-

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\smile$		$\smile$

- Závěr:
  Funkce je konvexní na celém definičním oboru. Nemá inflexní body.