# Integrály obsahující goniometrické funkce: $R(\cos x, \sin x)$

$$\int \cos^m(x) \cdot \sin^n(x)\ dx,\ \ m, n \in \mathbb{Z}$$

- aspoň jedno z čísel $m, n$ je **liché**:
  **substituce**: (m je liché) $\boxed{\sin x = t}$ resp. (n je liché) $\boxed{\cos x = t}$
  $\Rightarrow$ $\cos x\ dx = dt$ resp. $\sin x\ dx = dt$,
  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
- obě čísla jsou **sudá, nezáporná**
  **úprava**: $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$
- obě čísla jsou **sudá, alespoň jedno záporné**:
  **substituce**: $\boxed{t = \operatorname{tg} x}$
- univerzální substituce $\boxed{t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$, $x \in (-\pi, \pi)$,

  $x = \operatorname{arctg} t,\ \ dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt,\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

# Příklady

1. $\int \cos^5 x \sin^2 x \; dx$
2. $\int \frac{1}{\sin x} \; dx, \;\; x \in (0, \pi)$
3. $\int \cos^2 x \; dx$
4. $\int \sin^4 x \cos^2 x \; dx$

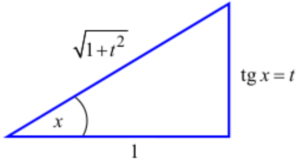
# Substituce $t = tg\ x$

Příklad $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}\, dx$ Integrujme na např. $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$m = 2$: sudé, $n = -8$: sudé **záporné**, použijeme $\boxed{t = \operatorname{tg} x}$

- $$\boxed{t = \operatorname{tg} x, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt, \quad x \in I}$$
- Potřebujeme vyjádřit $\sin x$, $\cos x$ pomocí $\operatorname{tg} x$.

$$\boxed{\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$$

- 


Potřebné vztahy odvodíme z pravoúhlého trojúhelníka, jehož jeden úhel má velikost $x$. Přilehlou odvěsnu zvolíme rovnu 1, protilehlá odvěsna bude mít velikost $\operatorname{tg}$ x. Z Pythagorovy věty vypočteme velikost přepony $\sqrt{1+t^2}$.
Použijeme definice funkcí sinus a kosinus (poměr velikostí protilehlé, resp. přilehlé odvěsny ku přeponě).

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}\, dx = \left| \begin{array}{c} \text{substituce} \\ t = \operatorname{tg} x \end{array} \right| = \int \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^8} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}\, dx = \left| \begin{array}{c} \text{substituce} \\ t = \mathrm{tg}\, x \end{array} \right| = \int \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^8} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\left(1+t^2\right)^4}{1} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int t^2 \left(1+t^2\right)^2\, dt = \frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C =$$

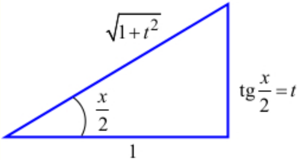
$$= \boxed{\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\, x + \frac{2}{5}\mathrm{tg}^5\, x + \frac{1}{7}\mathrm{tg}^7\, x + C}$$

# Univerzální substituce $\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x \in (-\pi, \pi)}$

- $$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt, \quad x \in I}$$
- Potřebujeme vyjádřit $\sin x$, $\cos x$ pomocí $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

$$\boxed{\sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

- 


Potřebné vztahy odvodíme z pravoúhlého trojúhelníka, jehož jeden úhel má velikost $\frac{x}{2}$. Přilehlou odvěsnu zvolíme rovnu 1, protilehlá odvěsna bude mít velikost $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Z Pythagorovy věty vypočteme velikost přepony $\sqrt{1+t^2}$.
Použijeme definice funkcí sinus a kosinus (poměr velikostí protilehlé, resp. přilehlé odvěsny ku přeponě) a vzorce pro dvojnásobný úhel $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

**Příklad** $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 1}, \ x \in (0, \pi)$

# Příklad

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 1} = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\ \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{2\dfrac{2t}{1+t^2} - \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2}\ dt =$$

$$= \int \frac{2}{4t - 1 + t^2 + 1 + t^2}\ dt = \int \frac{1}{t^2 - 2t}\ dt =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Rozložíme na} \\ \text{parciální zlomky:} \end{array} \quad \frac{1}{t(t-2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} \Rightarrow A(t-2) + Bt = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2} \right| =$$

$$\int \frac{-\frac{1}{2}}{t} + \frac{\frac{1}{2}}{t-2}\ dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|1 - \frac{2}{\operatorname{tg}\ \frac{x}{2}}\right| + C$$