

Aplikace určitého integrálu

Geometrické aplikace

- Obsah rovinné množiny
- Délka křivky
- Objem rotačního tělesa
- Obsah pláště rotačního tělesa

Fyzikální aplikace

- hmotnost,
- statický moment,
- souřadnice těžiště,
- moment setrvačnosti...

Výpočet obsahu (plochy) rovinných útvarů

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$, a je na něm **nezáporná**. Pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x platí

$$P = \int_a^b f(x) dx.$$

Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ **nekladná**, pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného zdola grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x platí

$$P = - \int_a^b f(x) dx.$$

Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné a platí $g(x) \leq f(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného zdola grafem funkce $g(x)$, shora grafem funkce $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$ platí

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Příklady

Vypočtete obsah rovinného obrazce ohraničeného

① $y = 4 - x^2; y = 0$

② $xy = 4; x + y = 5$

③ $y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0$

④ $y \leq 4, x^2 \geq y, x^2 \leq 4y$

Objem rotačního tělesa

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak rotační těleso, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora funkcí $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ kolem osy x , má objem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Pro výpočet objemu rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $g(x) \leq f(x)$ kolem osy x pro $x \in \langle a, b \rangle$ použijeme vztah

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx - \pi \int_a^b g^2(x) dx = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$$

Zcela analogicky můžeme určit objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikl rotací spojitě křivky $x = h(y)$, $y \in \langle c, d \rangle$ kolem osy y :

$$V = \pi \int_c^d h^2(y) dy$$

Objem: příklady

- $y = x^2$, $x = y^2$ kolem osy x ; kolem osy y
- $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$
- $y^2 = 5x$, $x = 8$

Délka oblouku křivky

Nechť je funkce $f(x)$ definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má zde spojitou derivaci. Pak délka této křivky

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Příklad

① $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$

Nechť funkce f je dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ jsou spojité pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojitě derivaci na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Pak délka této křivky

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Příklad

① $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$

Hmostnost rovinné křivky

Nechť funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a funkce $\rho(t)$ je na tomto intervalu spojitá a nezáporná.

Potom křivka C zadaná parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, která má délkovou hustotu $\rho(t)$ má hmotnost

$$m(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

Je-li křivka C grafem funkce $f(x)$ a $\rho(x)$ udává její délkovou hustotu v bodě $[x, f(x)]$, potom je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $\rho(x) \geq 0$ na tomto intervalu, je hmotnost

$$m(C) = \int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

• příklad: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $\rho(x) = x$

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx$$

$$m = \int_0^1 x \sqrt{1 + x^2} dx$$

Statické momenty a těžiště

Souřadnice těžiště

$$T = \left[\frac{S_y(C)}{m(C)}, \frac{S_x(C)}{m(C)} \right],$$

kde $m(C)$ je hmotnost křivky a S_x, S_y statické momenty vzhledem k osám x a y

$$S_x(C) = \int_a^b f(x) \rho(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

$$S_y(C) = \int_a^b x \rho(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

- příklad: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $\rho(x) = x$

$$S_x = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \cdot x \sqrt{1 + x^2} dx \qquad \frac{\sqrt{2}+1}{15}$$

$$S_y = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + x^2} dx \qquad \frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$$

Hmotnost a těžiště rovinné desky

Speciální případ: plošná hustota ρ v bodě $[x, y]$ závisí pouze na x a deska má tvar $D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$

$$m(D) = \int_a^b \rho(x)(f(x) - g(x)) dx$$

$$S_x(D) = \frac{1}{2} \int_a^b \rho(x)(f^2(x) - g^2(x)) dx$$

$$S_y(D) = \int_a^b x\rho(x)(f(x) - g(x)) dx$$

$$T = \left[\frac{S_y(D)}{m(D)}, \frac{S_x(D)}{m(D)} \right]$$

- příklad $y = 4x(1 - x)$, $\rho(x) = x^2$

$$(m = \frac{1}{5}, S_x = \frac{8}{105}, S_y = \frac{2}{15})$$