Operace s maticemi

Cvičení 4

3.10. 2019

Obsah

Matice

Definice (Matice).
Reálná *matice* typu $m \times n$ je obdélníkové schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Označení:
prvek na pozici (i,j) matice A:a_{ij}
množina všech reálných matic typu $m \times n$: $\mathbb{R}^{m\times n}$.
Je-li $m = n$, potom matici nazýváme **čtvercovou**.

Definice(Vektor).
Reálný n-rozměrný (aritmetický) vektor je matice typu $n \times 1$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Množina všech n-rozměrných vektorů se značí $\mathbb{R}^n$ (namísto $\mathbb{R}^{n\times 1}$).

Základní operace s maticemi

Definice (Rovnost matic). Dvě matice se rovnají, $A = B$, pokud mají stejné rozměry $m \times n$ a $A_{ij} = B_{ij}$ pro všechna i, j.

Definice (Součet matic). Buď $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Pak $A + B$ je matice typu $m \times n$ s prvky $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

Definice (Násobení číslem). Buď $\alpha \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Pak αA je matice typu $m \times n$ s prvky $(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$.

Výše zmíněné operace umožňují zavést přirozeně i odčítání jako $A - B := A + (-1)B$.

Speciální maticí je **nulová matice**, jejíž všechny prvky jsou nuly. Značíme ji 0 či $0_{m \times n}$ pro zdůraznění rozměru.

Věta (Vlastnosti součtu matic a násobení matice číslem).
Platí následující vlastnosti: α, β jsou čísla a A, B, C matice vhodných rozměrů.

1. $A + B = B + A \ldots$ (komutativita)
2. $(A + B) + C = A + (B + C) \ldots$ (asociativita)
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-1)A = 0$
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
6. $1A = A$
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \ldots$ (distributivita)
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \ldots$ (distributivita)

Příklady

Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

Určete

1. $3A$
2. $A + B$
3. $2A - 3B$

Speciální matice

- Nulová matice: $\forall i, j : a_{ij} = 0$
- Jednotková matice: (E_n, I_n), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,$a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$
- Čtverová matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Diagonální matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechna $i \neq j$.

  Diagonální matice má na diagonále libovolné prvky a mimo ni jsou nuly.
- Trojúhelníková matice

  Horní trojúhelníková matice. Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je horní trojúhelníková, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechna $i > j$.
  Horní trojúhelníková matice má pod diagonálou nuly. Podobně se zavádí i dolní trojúhelníková matice.

  Příkladem horní trojúhelníkové matice je jakákoli matice v odstupňovaném tvaru, protože pivoty musí být na nebo nad diagonálou. Obráceně to ovšem neplatí, horní trojúhelníková matice není automaticky v odstupňovaném tvaru.
- Symetrická matice. Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická, pokud $A = A^T$. Symetrická matice je tedy vizuálně symetrická dle hlavní diagonály.

Součin matic

Definice Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

Pak AB je matice typu $m \times n$ s prvky $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Příklad násobení matic

Pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 10 & 15 & 12 & 14 \\ 2 & 2 & \boxed{3} & 2 \\ 8 & 10 & 10 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vlastnosti součinu matic

Věta. (Vlastnosti součinu matic).

Platí následující vlastnosti: α je číslo a A, B, C matice vhodných rozměrů.

1. $(AB)C = A(BC) \ldots$ (asociativita)
2. $A(B + C) = AB + AC \ldots$ (distributivita)
3. $(A + B)C = AC + BC \ldots$ (distributivita)
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
5. $I_m A = A I_n = A$, kde $A \in R^{m \times n}$

Poznámka. Součin matic obecně není komutativní!
Pro mnoho matic je $AB \neq BA$. Najděte takový příklad!

Transpozice

Definice Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Pak transponovaná matice má typ $n \times m$, značí se A^T a je definovaná $(A^T)_{ij} := a_{ji}$.
Příklad Transpozice vlastně znamená překlopení dle hlavní diagonály, např.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Věta (Vlastnosti transpozice).
Platí následující vlastnosti: α je číslo a A, B matice vhodných rozměrů.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Elementární (řádkové) úpravy

Elementární řádkové úpravy jsou

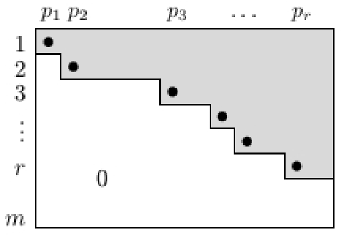
1. vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$
(tj. vynásobí se všechny prvky řádku),
2. přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému, přičemž $i \neq j$,
3. výměna i-tého a j-tého řádku.

Odstupňovaný tvar matice

Matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je v řádkově odstupňovaném tvaru, pokud existuje r takové, že platí:

- řádky $1, \dots, r$ jsou nenulové (tj. každý obsahuje aspoň jednu nenulovou hodnotu),
- řádky $r+1, \dots, m$ jsou nulové,

a navíc označíme-li p_i nejmenší číslo sloupce, ve kterém $a_{ij} \neq 0$, tak platí $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$.



Každou matici lze prevést elementárními řádkovými úpravami do odstupňovaného tvaru.

Sloupce $p_1, \dots p_r$ nazveme bázické, ostatní nebázické.

Hodnost matice

Definice (hodnost matice). Maximální počet lineárně nezávislých řádků matice $\mathbf{A}$ (chápaných jako aritmetické vektory) nazýváme hodností matice $\mathbf{A}$. Značíme ji $\mathbf{h(A)}$.

$\boxed{\text{Elementární řádkové operace nemění hodnost matice}}$

Hodností matice rozumíme počet nenulových řádků po převodu do odstupňovaného tvaru.

Regulární matice

Definice (regulární a singulární matice).
Čtvercovou matici typu $n \times n$, která má **maximální možnou hodnost** (tj. n), nazýváme regulární maticí. Čtvercovou matici, která není regulární, nazýváme singulární maticí.
Typickým příkladem regulární matice je E_n a singulární matice 0.

Tvrzení Čtvercová matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je regulární $\Leftrightarrow$ soustava $Ax = 0$ má jediné řešení $x = 0$.

Tvrzení Pro čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí: A je regulární $\Leftrightarrow$ pro každé $b \in \mathbb{R}^n$ má soustava $Ax = b$ jediné řešení.

Vlastnosti regulárních matic.
Součet regulárních matic nemusí být regulární matice, vezmeme např. $I + (-I) = 0$.
Součin regulárních matic je regulární matice.

Inverzní matice

Motivace pro inverzní matice: Matice umíme sčítat, odečítat, násobit, tak nešly by i dělit? Ukážeme si, že něco jako dělení lze zavést, ale jen pro regulární matice.

Definice Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak A^{-1} je inverzní maticí k A, pokud splňuje

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$$

Které matice mají inverzi? Pouze a jen ty regulární.

Věta (O existenci inverzní matice).
Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Je-li A regulární, pak k ní existuje inverzní matice, a je určená jednoznačně. Naopak, existuje-li k A inverzní, pak A musí být regulární.

Věta Je-li A regulární, pak A^T je regulární.

Věta (Jedna rovnost stačí). Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
(1) Je-li $BA = E$, pak A je regulární a $B = A^{-1}$.
(2) Je-li $AB = E$, pak A je regulární a $B = A^{-1}$.

Výpočet inverzní matice

K matici A připíšeme jednotkovou matici.
Elementárními řádkovými úpravami
převedeme matici A na jednotkovou.
Potom na místě jednotkové matice dostaneme A^{-1}.

$$AE \sim EA^{-1}$$

Pokud na místě A nevznikne jednotková matice,
potom matice A není regulární a inverzní neexistuje.

Věta (Vlastnosti inverzní matice).
Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární. Pak:

- $(A^{-1})^{-1} = A$,
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$,
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ pro $\alpha \neq 0$,
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Maticové rovnice

$$A \cdot X \cdot B = C$$

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1},$$

pokud inverzní matice existují.
Příklady

1. $$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}$$

2. $$X \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinant matice

Definice Nechť A je **čtvercová** matice.

Determinantem matice A nazýváme číslo, které označujeme $\det A$ a které lze matici A přiřadit podle těchto pravidel:

a) Je-li $A = (a)$ čtvercová matice typu 1×1, pak $\det A = a$.

b) Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice typu $n \times n$ (pro $n > 1$), vybereme libovolný řádek matice A (označíme jej jako i–tý) a položíme

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

kde A_{ij} je tzv.doplněk prvku a_{ij} v matici A,

$$A_{ij} \;=\; \text{doplněk } a_{ij} \;=\; (-1)^{i+j} A^*_{ij},$$

kde A^*_{ij} je determinant čtvercové matice typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z matice A vynecháním i–tého řádku a j–tého sloupce, tj.

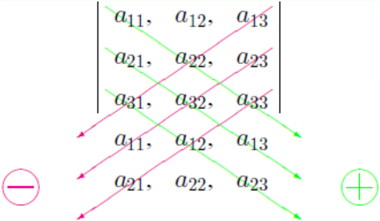
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \;\cdot\; (-1)^{i+j} \det(A^*_{ij})$$

Součtu říkáme (Laplaceův) rozvoj determinantu podle i-tého řádku.

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$: $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Sarrusovo pravidlo[1]

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ můžeme použít Sarrusovo pravidlo:



$$\det A = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{array}$$

Sarrusovo pravidlo ze použít pouze pro matice rozměru 3×3!

Determinant matice většího rozměru počítáme rozvojem.

[1] Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861)

Adjungovaná matice

Definice Pro čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má adjungovaná matice $\mathrm{adj}(A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ složky:

$$\mathrm{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} A^*_{ji}, \; i, j = 1 \dots n,$$

kde A^*_{ji} je determinant čtvercové matice typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z matice A vynecháním j–tého řádku a i–tého sloupce.

Matice $\mathrm{adj}(A)$ je matice vytvořená z doplňků jednotlivých prvků a následně transponovaná.

Věta Pro každou čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí :

$$A \cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n.$$

Jsou-li prvky matice A celá čísla, bude mít inverzní matice A^{-1} pouze celá čísla právě tehdy, když $\det(A) = \pm 1$.

Výpočet inverzní matice pomocí adjungované matice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{\det A}\left(\boxed{\mathsf{A*}}\right)^T,$$

kde $\boxed{\mathsf{A*}}$ je matice z doplňků prvků a_{ij}.

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{cases} \text{doplněk} = a & (-1)^{1+1}\det(d) & = & +d \\ \text{doplněk} = b & (-1)^{1+2}\det(c) & = & -c \\ \text{doplněk} = c & (-1)^{2+1}\det(b) & = & -b \\ \text{doplněk} = d & (-1)^{2+2}\det(a) & = & +a \end{cases}$$

$$\left(\boxed{\mathsf{A*}}\right) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(A) = \left(\boxed{\mathsf{A*}}\right)^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Vlastnosti determinantu

- Determinant čtvercové matice, která má buď pod hlavní diagonálou nebo nad ní samé nuly je roven součinu prvků na hlavní diagonále.
  - Determinant jednotkové matice typu $n \times n$ je roven 1.
  - Obsahuje-li některý řádek (nebo sloupec) matice A samé nuly, je $\det A = 0$.
- $\det A^T = \det A$
- pro regulární matici: $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$
- $\det AB = \det A \cdot \det B$, ale $\det(A+B) \neq \det A + \det B$,
- nicméně: řádková (a sloupcová) linearita:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_1 & \dots & a_{in}+b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matice je regulární $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Determinant a elementární úpravy

K výpočtu determinantu je možné využít Gaussovu eliminaci.
K tomu musíme
a) umět spočítat determinant matice v odstupňovaném tvaru,

b) vědět, jak hodnotu determinantu ovlivňují elementární řádkové úpravy.

Determinant matice v odstupňovaném je roven součinu diagonálních prvků.

Nechť matice A' vznikne z A nějakou elementární úpravou:

1. Vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \in \mathbb{R}$: $\det(A') = \alpha det(A)$.
2. Výměna i-tého a j-tého řádku: $\det(A') = -\det A$.
3. Přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému, přičemž $i \neq j$: **nemění determinant,** $\det(A') = \det(A)$.