Vektorové prostory

Matematika I

26.9.2019

Obsah

Řecká abeceda

A, α alfa	B, β beta	Γ, γ gama	Δ, δ delta	E, ε epsilon	Z, ζ zeta
H, η eta	Θ, ϑ teta	I, ι iota	K, κ kapa	Λ, λ lambda	M, μ mí
N, ν ní	Ξ, ξ ksí	O, o omikron	Π, π pí	P, ρ ró	Σ, σ sigma
T, τ tau	Υ, υ upsilon	Φ, φ fí	X, χ chí	Ψ, ψ psí	Ω, ω omega

Vektorový prostor

- Množina reálných čísel $\mathbb{R}$: $(\alpha, \xi, \tau \in \mathbb{R})$
- Reálný n-rozměrný aritmetický vektor: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- Množina všech n-rozměrných vektorů: $\mathbb{R}^n$
- Definujeme operace:
  - sčítání vektorů: $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:
    $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
  - násobení vektoru reálným číslem: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$:
    $\alpha\ \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$
- uzavřenost:
  - sčítání: $\forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
  - násobení reálným číslem: $\alpha\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- neutrální prvek:
  - $\exists\ \mathbf{o} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{x}$
  - $\exists\ 1 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$
- inverzní prvek: $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\ \exists\ \text{-}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} + (\text{-}\mathbf{x}) = \mathbf{o}$
- komutativita, asociativita, distributivita:
  - $\forall\ \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
  - $\forall\ \mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$:$(\ \mathbf{x} + \mathbf{y}\ ) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\ \mathbf{y} + \mathbf{z})$
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\alpha(\beta \mathbf{x}\ ) = (\ \alpha\beta)\mathbf{x}$
  - $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$: $\alpha(\ \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\ \mathbf{x} + \alpha\ \mathbf{y}$, $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}$

Příklady vektorových prostorů

1. $\mathbb{R}^n$
2. $\mathbb{R}^{m\times n}$
3. $\mathcal{P}$ Polynomy s reálnými koeficienty proměnné x
4. $\mathcal{P}^n$ Polynomy **nejvýše** n-tého stupně s reálnými koeficienty proměnné x
5. $\mathcal{F}$ Reálné funkce $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
6. $\mathcal{C}$ Spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
7. $\mathcal{C}_{[a,b]}$ Spojité funkce na intervalu $\langle a,\ b\rangle$ $f : \langle a,\ b\rangle \to \mathbb{R}$

Sloupcový a řádkový prostor matice.
Ke každé matici máme přirozeně přiřazeny dvě skupiny aritmetických vektorů, řádkové a sloupcové. Prostorům, které generují, říkáme řádkový a sloupcový prostor.

Lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů

Definice (lineární kombinace).
Je-li $u_1,\ u_2, \ldots, u_n$ skupina vektorů ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}$ a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou reálná čísla, pak vektor $\boxed{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n}$ (který je rovněž vektorem ve $\mathbb{V}$) nazýváme **lineární kombinací vektorů** $u_1, u_2, \ldots u_n$.

Definice (lineární závislost a nezávislost vektorů).
Skupinu vektorů $u_1,\ u_2, \ldots, u_n$ nazýváme lineárně závislou (LZ), jestliže reálná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, z nichž **alespoň jedno je různé od nuly** a platí $\boxed{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = o}$.
Pokud $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = o$ **pouze** pro $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, nazýváme skupinu vektorů lineárně nezávislou (LN).

Tvrzení.

- Je-li jedním ze skupiny vektorů $u_1,\ u_2, \ldots, u_n$ z vektorového prostoru $\mathbb{V}$ nulový vektor, pak tato skupina je LZ.
- Skupina vektorů $u_1,\ u_2, \ldots, u_n$ (kde $n > 1$) z vektorového prostoru $\mathbb{V}$ je LZ právě tehdy, je-li možné alespoň jeden z vektorů této skupiny vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů skupiny.

Báze vektorového prostoru

O vektorovém prostoru $\mathbb{V}$ řekneme, že je n rozměrný ($dim\mathbb{V} = n$), jestliže v prostoru

- existuje skupina n vektorů, která je lineárně nezávislá
- a každá skupina více než n vektorů je lineárně závislá.

Dimenze (rozměr) vektorového prostoru $\mathbb{V}$ je rovna maximálnímu **počtu** lineárně nezávislých vektorů, které lze ve $\mathbb{V}$ nalézt.

Definice (báze vektorového prostoru).
Nechť $\mathbb{V}$ je n–rozměrý vektorový prostor.
Každou lineárně nezávislou skupinu n vektorů z $\mathbb{V}$ nazýváme bází prostoru $\mathbb{V}$.

Tvrzení. Je-li $u_1,\ u_2,\ldots,u_n$ báze vektorového prostoru $\mathbb{V}$, pak každý vektor z $\mathbb{V}$ lze vyjádřit jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů této báze.