Zadání

Pro zadanou mocninnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n 4^n}{3^n(n^2+1)}$ určete

1. střed a poloměr konvergence,
2. interval absolutní konvergence,
3. ve kterých bodech řada konverguje relativně,
4. ve kterých diverguje.

Výsledek

Poznámka: Pro přehlednost začínám výsledky přiřazenými k jednotlivým bodům, postup je uveden dále.

1. střed konvergence $x_0 = -2$; poloměr konvergence $R = 3/4$,
2. interval absolutní konvergence: $(-11/4; -5/4)$,
3. řada konverguje relativně v bodě $x = -11/4$,
4. řada diverguje v intervalu $(-\infty, -11/4) \cup \langle -5/4; +\infty)$.

Postup řešení

Je-li $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, pak zadaná řada konverguje absolutně podle d'Alembertova kritéria.

$$a_n = \frac{n(x+2)^n 4^n}{3^n(n^2+1)}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)(x+2)^{n+1} 4^{n+1}}{3^{n+1}[(n+1)^2+1]}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(x+2)^{n+1}4^{n+1}}{3^{n+1}[(n+1)^2+1]} \cdot \frac{3^n(n^2+1)}{n(x+2)^n 4^n} = \frac{4}{3} \cdot \frac{(n+1)(n^2+1)}{n(n^2+2n+2)} \cdot (x+2) = \frac{4}{3} \cdot \frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n} \cdot (x+2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4}{3} \cdot \frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n} \cdot (x+2) \right| = \frac{4}{3}|x+2| \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n} = \frac{4}{3}|x+2|$$

Po dosazení výsledku z výše uvedeného výpočtu do d'Alembertova kritéria:

$$\frac{4}{3}|x+2| < 1$$

$$|x+2| < \frac{3}{4}$$

Z této nerovnice je zřejmé, že střed konvergence je -2 a poloměr konvergence $^3/_4$. Výsledný interval absolutní konvergence tedy jistě bude zahrnovat interval $(-2 - {}^3/_4; -2 + {}^3/_4) = (-{}^{11}/_4; -{}^5/_4)$. D'Alembertovo kritérium také určuje, že v intervalech $(-\infty; -{}^{11}/_4)$ a $(-{}^5/_4; \infty)$ řada diverguje. Zbývá tedy určit chování řady pouze pro dvě hodnoty x, jmenovitě $x = -{}^{11}/_4$ a $x = -{}^5/_4$.

$$x = -\frac{5}{4} \to a_n = \frac{n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 4^n}{3^n(n^2+1)} = \frac{n}{n^2+1}$$

$$x = -\frac{11}{4} \to a_n = \frac{n \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^n \cdot 4^n}{3^n(n^2+1)} = \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1}$$

První řadu ($x = -{}^5/_4$) srovnám s harmonickou řadou $b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

Podle limitního srovnávacího kritéria platí, že pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0, b_n \geq 0$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in (0; \infty)$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. V tomto případě je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ harmonická řada, která diverguje, proto diverguje i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Druhou řadu ($x = -{}^{11}/_4$) posoudím pomocí Leibnizova kritéria. Jeho předpoklady jsou následující: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Jsou-li tyto předpoklady splněny, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ je konvergentní.

Řadou, která musí splnit předpoklady, bude tedy stejně jako v předchozím případě řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &< a_n \\
\frac{n+1}{(n+1)^2+1} &< \frac{n}{n^2+1} \\
(n+1)(n^2+1) &< n(n^2+2n+2) \\
n^3+n^2+n+1 &< n^3+2n^2+2 \\
n &< n^2+1 \text{ pro jakékoli } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Je evidentní, že platí také $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Z toho vyplývá, že druhá řada konverguje podle Leibnizova kritéria. První řada, která je vlastně řadou absolutních hodnot členů druhé řady, je divergentní, mohu tedy prohlásit, že druhá řada konverguje relativně.