# Matematika 1

## Přednáška 1

6. října 2018

# Obsah

# Úvodní informace

Olga Majlingová : Na Okraji, místnost 301
konzultace: úterý 12-. . . podle domluvy e-mailem

Zápočet a zkouška

Zápočet:

Semestrální práce (domácí úkol) bude zadávána po částech.

Zkouška: písemná, 3 části:

lineární algebra, diferenciální počet, integrální počet.

# Organizace předmětu

**Tématické celky:**

- I. Lineární algebra
  - soustavy lineárních rovnic
  - operace s maticemi
  - vektorové prostory
  - aplikace (analytická geometrie, aj.)
- II. Diferenciální počet reálné funkce jedné reálné proměnné
  - definiční obor
  - limita a spojitost
  - derivace a její použití
- III. Integrální počet reálné funkce jedné reálné proměnné
  - primitivní funkce, neurčitý integrál
  - určitý integrál
  - nevlastní integrál

# Lineární algebra

## Zdroje informací

`http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/MI.html`
`příklady:`
`http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/pdf/1.pdf`
`http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/pdf/2.pdf`

## Požadované znalosti

- Soustavy lineárních rovnic:
  - věta o existenci a počtu řešení
  - řešení Gaussovou eliminační metodou
- Operace s maticemi
  - sčítání, násobení číslem
  - maticové násobení
  - určení hodnosti
  - výpočet determinantu
  - určení inverzní matice
  - řešení maticové rovnice
  - výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů
- Vektorové prostory
  - lineární závislost a nezávislost vektorů,
  - báze vektorového prostoru

# Soustavy lineárních rovnic

## Z jakých úloh?

Nejstarší zaznamenaná úloha na soustavy rovnic (cca 200 př.n.l.):

*Tři snopy dobrého obilí, dva snopy průměrného a jeden podřadného se prodávají celkem za 39 dou.*

*Dva snopy dobrého obilí, tři průměrného a jeden podřadného se prodávají za 34 dou.*

*Jeden snop dobrého obilí, dva průměrného a tři podřadného se prodávají za 26 dou.*

*Jaká je cena za jeden snop dobrého / průměrného / podřadného obilí?*

Zapsáno dnešní matematikou, dostáváme soustavu rovnic, kde x, y, z jsou neznámé pro ceny za jeden snop dobrého / průměrného / podřadného obilí.

Analytická geometrie – Vzájemná poloha přímek v rovině, rovin v prostoru.

Interpolace a aproximace hodnot z měření

Fyzika – Elektrické obvody, ...

# Soustava rovnic v maticovém zápisu

úloha
o snopech obilí

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 34 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 26 \end{array}$$

**Definice** (Matice).
Reálná *matice* typu $m \times n$ je obdélníkové schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

**Označení:**
prvek na pozici $(i,j)$ matice $A$:$a_{ij}$
množina všech reálných matic typu $m \times n$: $\mathbb{R}^{m \times n}$.
Je-li $m = n$, potom matici nazýváme **čtvercovou**.

**Definice**(Vektor).
Reálný $n$-rozměrný (aritmetický) vektor je matice typu $n \times 1$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Množina všech $n$-rozměrných vektorů se značí $\mathbb{R}^n$
(namísto $\mathbb{R}^{n \times 1}$).

Mějme soustavu $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & a_{mn}x_n & = & b_n. \end{array}$$

**Řešením** rozumíme každý vektor $x$ vyhovující **všem** rovnicím.
**Matice soustavy** je matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a **rozšířená matice soustavy** je

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

# Příklad

Pro příklad "o snopech obilí"se soustava rovnic maticově zapíše:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right)$$

Rozšířená matice soustavy plně popisuje soustavu rovnic.
řádky odpovídají rovnicím, sloupce vlevo neznámým.

# Geometrický význam soustavy rovnic

Mějme dvě rovnice o dvou neznámých, $m = n = 2$, tedy

$$\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2. \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & x_2 & = & 3, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 11. \end{array}$$

První rovnice popisuje přímku v $\mathbb{R}^2$ (při $a_{11} \neq 0 \vee a_{12} \neq 0$), ($p: \ 2x - y - 3 = 0$) druhá také, ($q: \ 2x + 3y - 11 = 0$).
Řešení soustavy leží tedy v průniku obou přímek.
Podobně pro $n = 3$, každá rovnice popisuje rovinu v prostoru $\mathbb{R}^3$ a řešení představuje průnik těchto rovin.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & -3 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

# Elementární řádkové úpravy

**Definice**

Elementární řádkové úpravy jsou

1. vynásobení $i$-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$ (tj. vynásobí se všechny prvky řádku),
2. přičtení $\alpha$-násobku $j$-tého řádku k $i$-tému, přičemž $i \neq j$,
3. výměna $i$-tého a $j$-tého řádku.

| Elementární řádkové operace zachovávají množinu řešení soustavy. |
|---|

# Postup řešení soustavy rovnic Gaussovou eliminací

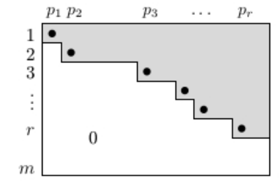
Pomocí **elementárních úprav** převedeme rozšířenou matici soustavy na jednodušší matici, ze které řešení snadno určíme.

Ten jednodušší tvar matice se nazývá **odstupňovaný** tvar matice.

**Definice** (Odstupňovaný tvar matice).

Matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je v řádkově odstupňovaném tvaru, pokud existuje $r$ takové, že platí

- řádky $1, \ldots, r$ jsou nenulové (tj. každý obsahuje aspoň jednu nenulovou hodnotu),
- řádky $r+1, \ldots, m$ jsou nulové,




a navíc označíme-li $p_i$ nejmenší číslo sloupce, ve kterém $a_{ij} \neq 0$, tak platí $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$.

Každou matici lze prevést elementárními řádkovými úpravami do odstupňovaného tvaru.

Sloupce $p_1, \ldots p_r$ nazveme bázické, ostatní nebázické.

# Převod do odstupňoveného tvaru

Například následující postup převádí matici do odstupňovaného tvaru.
**Krok 1:** Položíme číslo řádku i=1, číslo sloupce j=1.
**Krok 2:** Pokud pro všechny "další" řádky $k \geq i$ a sloupce $\ell \geq j$ platí : $a_{k,\ell} = 0$, končíme
(ve zbývající části matice už nejsou nenulové prvky).
**Krok 3:** Výběr "aktuálního" sloupce $j$ (přeskočíme nulové podsloupečky).
Najdeme nejmenší číslo sloupce $\ell \geq j$ takové, že v řádcích $k \geq i$ je v tomto sloupci aspoň jeden nenulový prvek.
Tento sloupec bude aktuálním sloupcem, tj.
$j = \min\{\ell : \ell \geq j,\ a_{kl} \neq 0 \text{ pro nějaké } k \geq i\}$.
**Krok 4:** Výběr "aktuálního" řádku $i$.
Jesliže $a_{ij} = 0$, najdeme řádek $k \geq i$, ve kterém $a_{ik} \neq 0$, a vyměníme řádky $k$ a $i$.
**Krok 5:** Elementární úprava řádků $k > i$ (v těchto řádcích vynulujeme zbývající prvky sloupce $j$).
Ke všem prvkům řádků $k > i$ přičteme $-\dfrac{a_{kj}}{a_{ij}}$ násobek řádku $i$.
**Krok 6:** Zvětšíme $i$ o 1, $j$ o 1 a pokračujeme krokem 2.

# Příklad převodu matice na odstupňovaný tvar

Soustavě rovnic
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & & & + & 9x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & 7 \end{array}$$

odpovídá rozšířená matice $\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right)$ kterou postupně

upravujeme:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{2} & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

# Existence a počet řešení

Z odstupňovaného tvaru rozšířené matice soustavy poznáme, zda soustava rovnic má nebo nemá řešení:

- Soustava **nemá řešení**,
  je-li aspoň jeden řádek ve tvaru $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & b \neq 0 \end{array}\right)$,
  (takový řádek odpovídá rovnici :$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b \neq 0$).
- Jinak **řešení existuje**; buď jediné nebo nekonečně mnoho.
  Z rozšířené matice soustavy vyškrtneme všechny nulové řádky.
  - Soustava má **jediné** řešení,
    pokud v matici po vyškrtnutí nulových řádků
    zůstalo tolik řádků, kolik je neznámých.
    Toto řešení získáme postupným výpočtem neznámých
    **od poslední k první, zdola nahoru** tak, že
    - z poslední rovnice vypočteme poslední neznámou,
      tu dosadíme do všech předcházejících rovnic;
    - z předposlední .. druhé rovnic vyjádříme předposlední ..
      druhou neznámou a dosadíme do všech předcházejících rovnic;
    - z první rovnici vyjádříme první neznámou.
  - Soustava **nekonečně mnoho řešení**, pokud po vyškrtnutí nulových řádků zůstalo méně rovnic než neznámých.
    Řešení vyjádříme přes "volné" proměnné.

# Vyjádření řešení zpětnou substitucí

Mějme soustavu rovnic v odstupňovaném tvaru.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení existuje, provedeme zpětnou substituci.

$x_4 = 1$

$x_3$ je volná (nebázická) proměnná

$x_2 = 1 + x_4 - 2x_3 = 2 - 2x_3$

$x_1 = \frac{1}{2}(1 - 5x_4 + x_3 - 2x_2) = -4 + \frac{5}{2}x_3$

Řešení zapíšeme ve tvaru $x = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x_3 \in \mathbb{R}$

# Příklad o snopech obilí

Maticový zápis:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right)$$

Převod na odstupňovaný tvar:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & -4 & -8 & -39 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & -36 & -99 \end{array}\right)$$

Existuje jediné řešení,

$$\begin{array}{lrcl} \text{3. rovnice:} & z & = & \frac{99}{36} = \frac{11}{4} = 2.75, \\ \text{2. rovnice:} & y & = & \frac{1}{5}(24 - z) = \frac{1}{5}\left(24 - \frac{11}{4}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{85}{4} = \frac{17}{4} = 4.25, \\ \text{1. rovnice:} & x & = & \frac{1}{3}(39 - 2y - z) = \frac{1}{3} \cdot \left(39 - 2 \cdot \frac{17}{4} - \frac{11}{4}\right) = \frac{37}{4} = 9.25 \end{array}$$

Ceny jednoho snopu obilí jsou:

9.25 dou za dobré, 4.25 dou za průměrné, 2.75 dou za podřadné.

# Příklad: Vzájemná poloha rovin

a)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 4z & = & 9 \\ x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & y & - & z & = & 6 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 4z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & y & - & z & = & 3 \end{array}$$

Společné body $(x, y, z)$ najdeme, vyřešíme-li soustavy rovnic.
Maticové zápisy:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Po úpravě na odstupňovaný tvar:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\infty$řešení

$z = -1, y = t, x = 5 - t, t \in \mathbb{R}$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

nemá řešení

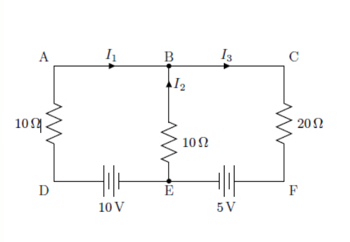
3 roviny nemají společné body

Roviny a) mají společnou přímku,

určenou bodem $[5,\ 0,\ -1]$ a směrovým vektorem $(-1, 1, 0)$

# Příklad

Uvažujme elektrický obvod jak je vyznačený na obrázku. Chceme-li určit hodnoty elektrických proudů $I_1,\ I_2,\ I_3$, využijeme fyzikálních zákonů:
1. Ohmův zákon: Napětí je rovno součinu proudu a odporu: $U = IR$,
2. Kirchhoffův zákon o proudu: Součet proudů vstupujících do uzlu se rovná součtu proudů z uzlu vystupujících.
3. Kirchhoffův zákon o napětí: Součet napětí ve smyčce je roven nule.




Kirchhoffův zákon o proudu: rovnice

$I_1 + I_2 - I_3 = 0$.

Kirchhoffův zákon o napětí (spolu s Ohmovým zákonem) pro smyčku *DABE* dává rovnici $10I_1 - 10I_2 = 10$,

pro smyčku *EBCF* : $10I_2 + 20I_3 = 5$.

(Smyčku *DABCFE* již uvažovat nemusíme, neboť vyplývá z předchozích dvou.)

Tím dostáváme soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 10 & -10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 20 & 5 \end{array}\right)$$

Převedeme na odstupňovaný tvar:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 20 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

Vyřešením dostaneme:

$$\begin{aligned} I_1 &= 0.7A \\ I_2 &= -0.3A \\ I_3 &= 0.4A \end{aligned}$$

# Frobeniova věta

**Definice** Hodnost matice

Hodností matice rozumíme počet nenulových řádků po převodu do odstupňovaného tvaru.

Značíme **rank(A)**.

**Frobeniova věta** charakterizuje řešitelnost soustav rovnic pomocí hodností matice a rozšířené matice soustavy:

**Soustava $(A|b)$ má (aspoň jedno) řešení právě tehdy, když rank$(A)$ = rank$(A|b)$.**

V angličtině tuto větu nazývají Rouchého–Capelliho věta,
v Rusku Kroneckerova–Capelliho věta
a ve Španělsku Rouchého– Frobeniova věta.

Můžete se setkat i s názvem Rouché-Fonteného věta.

# Frobeniova věta (a hodnosti matic) v příkladech

1. O snopech obilí:
   hodnost matice soustavy: $\text{rank}(A) = 3$,
   hodnost rozšířené matice: $\text{rank}(A|b) = 3 \Rightarrow$ řešení existuje
   počet neznámých $(3) =$ hodnosti matice $\Rightarrow$ jediné řešení
2. Vzájemná poloha rovin:
   hodnost matice soustavy: $\text{rank}(A) = 2$,
   hodnost rozšířené matice:
   a) $\text{rank}(A|b) = 2 \Rightarrow$ řešení existuje
      počet neznámých $(2) <$ hodnosti matice $\Rightarrow \infty$ řešení.
   b) $\text{rank}(A|b) = 3 \Rightarrow$ řešení neexistuje
3. Elektrický obvod:
   hodnost matice soustavy: $\text{rank}(A) = 3$,
   hodnost rozšířené matice: $\text{rank}(A|b) = 3 \Rightarrow$ řešení existuje
   počet neznámých $(3) =$ hodnosti matice $\Rightarrow$ jediné řešení

# Základní operace s maticemi

**Definice** (Rovnost matic). Dvě matice se rovnají, $A = B$, pokud mají stejné rozměry $m \times n$ a $A_{ij} = B_{ij}$ pro všechna $i, j$.

**Definice** (Součet matic). Buď $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pak $A + B$ je matice typu $m \times n$ s prvky $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ .

**Definice** (Násobení číslem). Buď $\alpha \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pak $\alpha A$ je matice typu $m \times n$ s prvky $(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$ .

Výše zmíněné operace umožňují zavést přirozeně i odčítání jako $A - B := A + (-1)B$.

Speciální maticí je **nulová matice**, jejíž všechny prvky jsou nuly. Značíme ji $0$ či $0_{m\times n}$ pro zdůraznění rozměru.

**Věta** (Vlastnosti součtu matic a násobení matice číslem). Platí následující vlastnosti: $\alpha, \beta$ jsou čísla a $A, B, C$ matice vhodných rozměrů.

1. $A + B = B + A \ldots$ (komutativita)
2. $(A + B) + C = A + (B + C) \ldots$ (asociativita)
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-1)A = 0$
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
6. $1A = A$
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \ldots$ (distributivita)
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \ldots$ (distributivita)

# Součin matic

**Definice** Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

Pak $AB$ je matice $P$ typu $m \times n$ s prvky $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$ .

**Příklad násobení matic**

Pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 10 & 15 & 12 & 14 \\ 2 & 2 & \boxed{3} & 2 \\ 8 & 10 & 10 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Příklad: soustava rovnic jako součin matic

Mějme matice: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (sloupcový vektor)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a22 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Výsledkem násobení matice $A$ vektorem $x$ je matice $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ (sloupcový vektor):

$$Ax = b,$$

tj. zápis soustavy rovnic.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n \end{matrix} = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}$$

# Vlastnosti součinu matic

**Jednotková matice.**
Značí se $I$ resp. $I_n$ (nebo $E$, $E_n$) a je to čtvercová matice řádu n s prvky $I_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $I_{ij} = 0$ jinak.
Je to tedy matice s jedničkami na diagonále a s nulami jinde.
Jednotkový vektor $e_i$ je pak $i$-tý sloupec jednotkové matice.
**Věta.** (Vlastnosti součinu matic).
Platí následující vlastnosti: $\alpha$ je číslo a $A, B, C$ matice vhodných rozměrů.

1. $(AB)C = A(BC)$ ...(asociativita)
2. $A(B + C) = AB + AC$ ...(distributivita)
3. $(A + B)C = AC + BC$ ...(distributivita)
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
5. $I_m A = AI_n = A$, kde $A \in R^{m\times n}$

**Poznámka. Součin matic obecně není komutativní!**
Pro mnoho matic je $AB \neq BA$. Najděte takový příklad!

# Transpozice

**Definice** Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Pak transponovaná matice má typ $n \times m$, značí se $A^T$ a je definovaná $(A^T)_{ij} := a_{ji}$.
**Příklad** Transpozice vlastně znamená překlopení dle hlavní diagonály, např.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

**Věta** (Vlastnosti transpozice).
Platí následující vlastnosti: $\alpha$ je číslo a $A, B$ matice vhodných rozměrů.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

# Příklady

Pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

spočítejte (pokud to má smysl)

1. $(A + 4B) + C$
2. $(A + B)^T \cdot 2C,$
3. $(B \cdot C) \cdot A^T,$
4. $(B \cdot 3A^T) + C$
5. $C \cdot (B^T - (\pi A)^T)$

# Regulární matice

**Definice** Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Matice $A$ je regulární, pokud soustava $Ax = 0$ má jediné řešení $x = 0$. V opačném případe se nazývá singulární.
Jiný ekvivalentní pohled na regulární matice je, že $Ax \neq 0$ pro všechna $x \neq 0$. Typickým příkladem regulární matice je $I_n$ a singulární matice 0.
**Věta** Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak následující je ekvivalentní: $A$ je regulární, $rank(A) = n$.
**Věta** Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak následující je ekvivalentní: $A$ je regulární, pro každé $b \in \mathbb{R}^n$ má soustava $Ax = b$ jediné řešení.

**Vlastnosti regulárních matic.**
Součet regulárních matic nemusí být regulární matice, vezmeme např. $I + (-I) = 0$.
Součin regulárních matic je regulární matice.

# Inverzní matice

Motivace pro inverzní matice: Matice umíme sčítat, odečítat, násobit, tak nešly by i dělit? Ukážeme si, že něco jako dělení lze zavést, ale jen pro regulární matice.

**Definice** Bud $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak $A^{-1}$ je inverzní maticí k $A$, pokud splňuje $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Které matice mají inverzi? Pouze a jen ty regulární.

**Věta** (O existenci inverzní matice).

Bud $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Je-li $A$ regulární, pak k ní existuje inverzní matice, a je určená jednoznačně. Naopak, existuje-li k $A$ inverzní, pak $A$ musí být regulární.

**Věta** Je-li $A$ regulární, pak $A^T$ je regulární.

**Věta** (Jedna rovnost stačí). Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(1) Je-li $BA = I$, pak $A$ je regulární a $B = A^{-1}$.

(2) Je-li $AB = I$, pak $A$ je regulární a $B = A^{-1}$.

# Výpočet inverzní matice

K matici $A$ připíšeme jednotkovou matici.
Ekvivalentními úpravami převedeme matici $A$ na jednotkovou.
Potom na místě jednotkové matice dostaneme $A^{-1}$.

$$AI \sim IA^{-1}$$

Pokud na místě $A$ nevznikne jednotková matice, potom matice $A$ není regulární a inverzní neexistuje.

# Vlastnosti inverzní matice

**Věta** (Vlastnosti inverzní matice).
Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární. Pak:
(1) $(A^{-1})^{-1} = A$,
(2) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$,
(3) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ pro $\alpha \neq 0$,
(4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

# Maticové rovnice

$$A \cdot X \cdot B = C$$

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1},$$

pokud inverzní matice existují.

# Determinant matice

**Definice** Nechť A je čtvercová matice.

Determinantem matice $A$ nazýváme číslo, které označujeme $\det A$ a které lze matici $A$ přiřadit podle těchto pravidel:

**a)** Je-li $A = (a)$ čtvercová matice typu $1 \times 1$, pak $\det A = a$.

**b)** Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice typu $n \times n$ (pro $n > 1$), vybereme libovolný řádek matice $A$ (označíme jej jako $i$–tý) a položíme

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

kde $A_{ij}$ je tzv.doplněk prvku $a_{ij}$ v matici $A$,

$$A_{ij} \ = \ \text{doplněk } a_{ij} \ = \ (-1)^{i+j}A^*_{ij},$$

kde $A^*_{ij}$ je determinant čtvercové matice typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z matice $A$ vynecháním $i$–tého řádku a $j$–tého sloupce, tj.

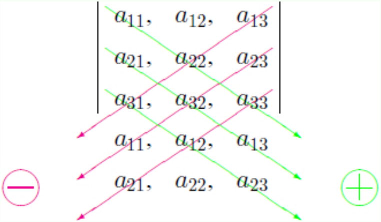
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ \cdot \ (-1)^{i+j} \det(A^*_{ij})$$

Součtu říkáme (Laplaceův) rozvoj determinantu podle $i$-tého řádku.

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$: $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

# Sarussovo pravidlo

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ můžeme použít Sarussovo pravidlo:




$$\det A = \begin{array}{l} \quad a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{array}$$

Sarussovo pravidlo ze použít pouze pro matice rozměru $3 \times 3$!

Determinant matice většího rozměru počítáme rozvojem.

# Adjungovaná matice

**Definice** Pro čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má adjungovaná matice $\mathrm{adj}(A) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ složky:

$$\mathrm{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} A^*_{ji}, \; i, j = 1 \dots n,$$

kde $A^*_{ji}$ je determinant čtvercové matice typu $(n-1)\times(n-1)$, která vznikne z matice $A$ vynecháním $j$–tého řádku a $i$–tého sloupce.

Matice $\mathrm{adj}(A)$ je matice vytvořená z doplňků jednotlivých prvků a následně transponovaná.

**Věta** Pro každou čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí :

$$A \cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n.$$

Jsou-li prvky matice $A$ celá čísla, bude mít inverzní matice $A^{-1}$ pouze celá čísla právě tehdy, když $\det(A) = \pm 1$.

# Výpočet inverzní matice pomocí adjungované matice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{\det A}\left(\boxed{\mathsf{A*}}\right)^T,$$

kde $\boxed{\mathsf{A*}}$ je matice z doplňků prvků $a_{ij}$.

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{cases} \text{doplněk} = a & (-1)^{1+1}\det(d) & = & +d \\ \text{doplněk} = b & (-1)^{1+2}\det(c) & = & -c \\ \text{doplněk} = c & (-1)^{2+1}\det(b) & = & -d \\ \text{doplněk} = d & (-1)^{2+2}\det(a) & = & +a \end{cases}$$

$$\left(\boxed{\mathsf{A*}}\right) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -d & a \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A) = \left(\boxed{\mathsf{A*}}\right)^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

# Vlastnosti determinantu

- Determinant čtvercové matice, která má buď pod hlavní diagonálou nebo nad ní samé nuly je roven součinu prvků na hlavní diagonále.
  - Determinant jednotkové matice typu $n \times n$ je roven 1.
  - Obsahuje-li některý řádek (nebo sloupec) matice A samé nuly, je $\det A = 0$.
- $\det A^T = \det A$
- pro regulární matici: $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$
- $\det AB = \det A \cdot \det B$, ale $\det(A + B) \neq \det A + \det B$,
- nicméně: řádková (a sloupcová) linearita:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_1 & \dots & a_{in} + b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matice je regulární $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

# Determinant a elementární úpravy

K výpočtu determinantu je možné využít Gaussovu eliminaci.
K tomu musíme
a) umět spočítat determinant matice v odstupňovaném tvaru,
b) vědět, jak hodnotu determinantu ovlivňují elementární řádkové úpravy.
Determinant matice v odstupňovaném je roven součinu diagonálních prvků.
Nechť matice $A'$ vznikne z $A$ nějakou elementární úpravou:

1. Vynásobení $i$-tého řádku číslem $\alpha \in \mathbb{R}$: $\det(A') = \alpha det(A)$.
2. Výměna $i$-tého a $j$-tého řádku: $\det(A') = -\det A$.
3. Přičtení $\alpha$-násobku $j$-tého řádku k $i$-tému, přičemž $i \neq j$: $\det(A') = \det(A)$.

# Geometrická interpretace determinantu

Uvažujme čtvercové regulární matice ($A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \det A \neq 0$)
Představme si řádky matice jako vektory v eukleidovském prostoru.

- $n = 2$ Doplňme v rovině oba vektory na rovnoběžník.
  Plošný obsah rovnoběžníku je roven $|\det A|$.
- $n = 3$ Doplňme v prostoru tři vektory na rovnoběžnostěn.
  Objem tohoto rovnoběžnostěn je roven $|\det A|$.
- $n \in \mathbb{N}$ Doplňme v prostoru vektory na $n$-rozměrný rovnoběžnostěn.
  Objem tohoto rovnoběžnostěn je roven $|\det A|$.

Poznámka. Svou roli hraje nejen velikost determinantu $A$, ale také jeho znaménko; to souvisí s pořadím hran rovnoběžnostěnu jako řádků matice $A$. Speciálně, pro $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ je $\det(A) > 0$ pokud řádky $A$ tvoří pravotočivou posloupnost vektorů (tzv. pravidlo palce), a $\det(A) < 0$ pokud tvoří levotočivou posloupnost.

# Použití determinantu pro polynomy

Polynomy

$p(x) = a_n x_n + \cdots + a_1 x + a_0,\ q(x) = b_m x_m + \cdots + b_1 x + b_0$

mají společný kořen právě tehdy, když

$$\det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & & & \\ & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix} = 0$$

# Vlastní čísla a vlastní vektory

**Definice** Komplexní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo čtvercové matice $A$ a $x \in \mathbb{C}^n$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda$, pokud

$$Ax = \lambda x, x \neq o.$$

Poznamenejme, že $x \neq o$ je nezbytná podmínka, protože pro $x = o$ by rovnost byla triviálně splněna pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Na druhou stranu, $\lambda = 0$ klidně může nastat.

## Výpočet vlastních čísel a určení vlastních vektorů

$$Ax = \lambda \cdot Ix \Rightarrow (A - \lambda I)\, x = o$$

$x \neq o \Rightarrow$ homogenní soustava rovnic s maticí soustavy $(A - \lambda I)$ musí mít nekonečně mnoho řešení, tedy musí platit:

$$\det (A - \lambda I) = 0.$$

Rozepsáním determinantu dostáváme charakteristický polynom matice $A$ vzhledem k proměnné $\lambda$. Kořeny tohoto polynomu jsou vlastní čísla $\lambda_k$.
Pro každé vlastní číslo řešíme soustavu rovnic

$$(A - \lambda_k I)x_k = o,$$

jejími nenulovými řešeními jsou vlastní vektory $x_k$.

Vlastní vektor při daném vlastním čísle není určen jednoznačně,

každý jeho nenulový násobek je také vlastním vektorem.

# Příklady: Vlastní čísla a vlastní vektory

Určíme vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. charakteristický polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

2. vlastní čísla $(\lambda_1,\ \lambda_2)$ jsou kořeny $p(\lambda)$, tj. řešení $p(\lambda) = 0$: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 5$
3. vlastní vektory, odpovídající $\lambda_1$, určíme řešením $(A - \lambda_1 I)x_1 = o$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-(-1) & 2 & 0 \\ 4 & 1-(-1) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t,\ t \neq 0$$

4. vlastní vektory, odpovídající $\lambda_2$, určíme řešením $(B - \lambda_2 I)x_2 = o$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-5 & 2 & 0 \\ 4 & 1-5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} r,\ r \neq 0$$

# Příklad 2

Určíme vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. charakteristický polynom $p(\lambda) = \det(B - \lambda I)$:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -8 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 + 16 = \lambda^2 - 6\lambda + 25$$

2. vlastní čísla ($\lambda_1,\ \lambda_2$) jsou kořeny $p(\lambda)$, tj. řešení $p(\lambda) = 0$:
$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm i\sqrt{64}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 3 + 4i,\ \lambda_2 = 3 - 4i$

3. vlastní vektory, odpovídající $\lambda_1$, určíme řešením $(B - \lambda_1 I)x_1 = o$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-(3+4i) & -8 & 0 \\ 2 & 3-(3+4i) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -4i & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), x_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ t \end{pmatrix} t,\ t \neq 0,\ t \in \mathbb{C}$$

4. vlastní vektory, odpovídající $\lambda_2$, určíme řešením $(B - \lambda_2 I)x_2 = o$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-(3-4i) & -8 & 0 \\ 2 & 3-(3-4i) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4i & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), x_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} r,\ r \neq 0, r \in \mathbb{C}$$

# Vlastnosti vlastních čísel

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$.
Potom platí:

- $A$ je regulární právě tehdy, když 0 není její vlastní číslo,
- je-li $A$ regulární, pak $A^{-1}$ má vlastní čísla $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,
- $A^2$ má vlastní čísla $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,
- $\alpha A$ má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,
- $A + \alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,
- $A^T$ má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.

Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak i komplexně sdružené $\bar{\lambda}$ je vlastním číslem $A$.

Zpracováno podle


1. Milan Hladík: Lineární algebra (nejen) pro informatiky (online) dostupné z

   http://kam.mff.cuni.cz/~hladik/LA/text_la.pdf
2. Jiří Neustupa: Matematika I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014
3. Pavel Burda, Radim Havelek, Radoslava Hradecká, Pavel Kreml: Matematika I
   (online) dostupné z

   http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/MI.html
4. Karel Rektorys a spol.: Přehled užité matematiky I, Nakladetelství Prometheus, Praha 2000